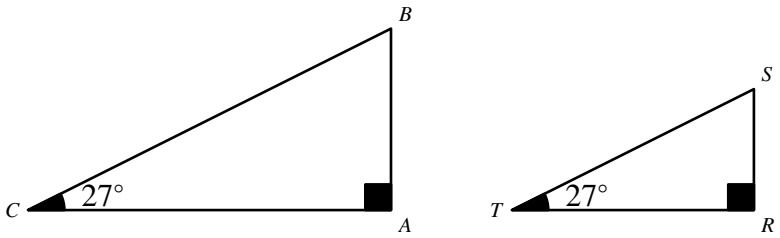
Trigonométrie dans le triangle rectangle

I) Rappel

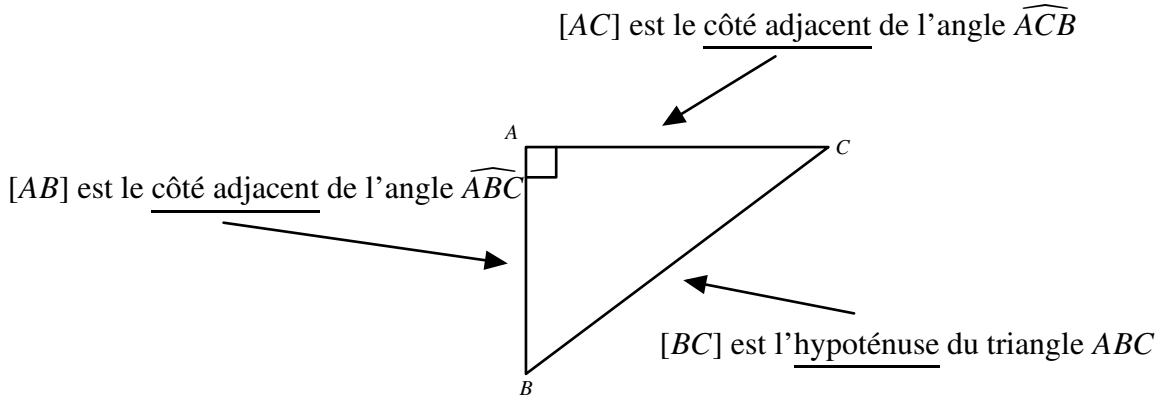


Les triangles ABC et RST ont leurs angles deux à deux de même mesure, ils sont donc semblables.
$[RT]$ est le côté homologue de $[AC]$. $[ST]$ est le côté homologue de $[BC]$. On a donc :

$$\frac{RT}{AC} = \frac{ST}{BC} \qquad \text{mais aussi} \qquad \frac{RT}{ST} = \frac{AC}{BC}$$

II) Vocabulaire

Dans un triangle ABC rectangle en A, on utilise le vocabulaire suivant pour désigner les côtés :



III) Cosinus

A) Définition

Définition

Dans un triangle rectangle, le **cosinus** d'un angle aigu est égal au rapport

$$\frac{\text{côté adjacent à l'angle}}{\text{hypoténuse}}$$

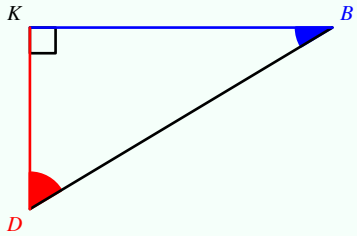
Remarque

On note $\cos(\widehat{B})$ ou $\cos(\widehat{ABC})$ le cosinus d'un angle aigu $\widehat{B}$.

Exemple

Dans le triangle DBK rectangle en K, on a :

$$\cos(\widehat{D}) = \frac{DK}{DB} \quad \text{et} \quad \cos(\widehat{B}) = \frac{BK}{BD}$$



Remarques

- On n'utilise pas cette formule avec l'angle droit du triangle rectangle.
- Le cosinus d'un angle est un nombre sans unité ; en effet, c'est un rapport de longueurs.
- Sur la calculatrice (en mode degrés), le cosinus d'un angle s'obtient à l'aide de la touche cos.

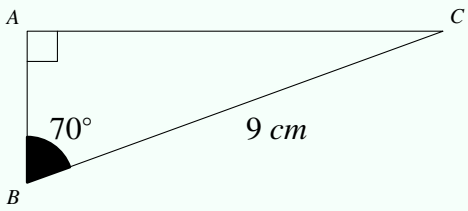
Propriété

Soit α la mesure d'un angle, en degrés. Si $0° < \alpha < 90°$, alors

$$0 < \cos(\alpha) < 1.$$

B) Calculs de longueurs

Exemples

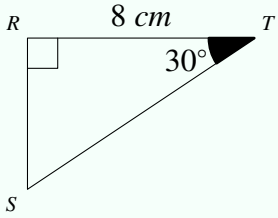


Calculer AB, au mm près.

Solution rédigée

Le triangle ABC est rectangle en A.
Donc :

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{BA}{BC}$$
$$\cos(70) = \frac{AB}{9}$$
$$\frac{\cos(70)}{1} = \frac{AB}{9}$$
$$AB = \frac{9 \times \cos(70)}{1}$$
$$\approx 3,1 \ cm$$



Calculer ST, au centième près.

Solution rédigée

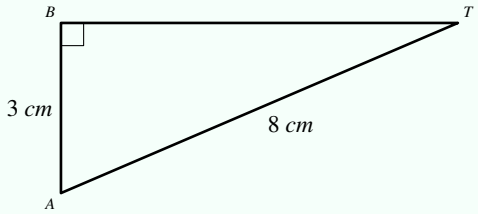
Le triangle RST est rectangle en R.
Donc :

$$\cos(\widehat{T}) = \frac{TR}{TS}$$
$$\cos(30) = \frac{8}{TS}$$
$$\frac{\cos(30)}{1} = \frac{8}{TS}$$
$$TS = \frac{8 \times 1}{\cos(30)}$$
$$\approx 9,24 \ cm$$

C) Calculs d'angles

Exemple

Calculer la mesure de $\widehat{BAT}$ au degré près.



Solution rédigée

Le triangle BAT est rectangle en B.
Donc :

$$\cos\left(\widehat{BAT}\right) = \frac{AB}{AT}$$
$$\cos\left(\widehat{BAT}\right) = \frac{3}{8}$$
$$\widehat{BAT} = \arccos\left(\frac{3}{8}\right)$$
$$\approx 68°$$

Remarques

— Au lieu de $\arccos\left(\frac{3}{8}\right)$, on peut écrire $\cos^{-1}\left(\frac{3}{8}\right)$.

— Sur la calculatrice (en mode degrés), il faut saisir la touche $\boxed{2^{\text{nde}}}$ ou $\boxed{\text{SHIFT}}$ avant la touche $\boxed{\cos}$ pour obtenir « $\cos^{-1}$ » ou « arccos ».

IV) Sinus - Tangente

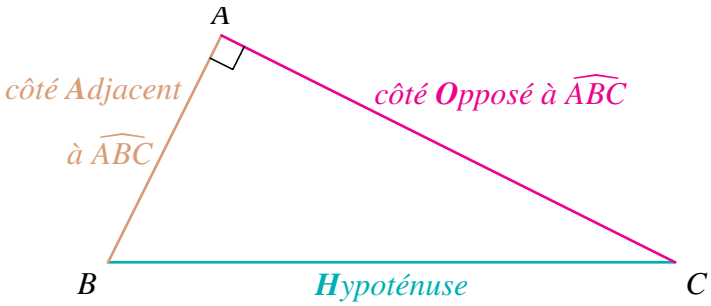
A) Formules

Le triangle ABC est rectangle en A.

$$\textbf{Sin}\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\text{côté Opposé à } \widehat{ABC}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\textbf{Cos}\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\text{côté Adjacent à } \widehat{ABC}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\textbf{Tan}\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\text{côté Opposé à } \widehat{ABC}}{\text{côté Adjacent à } \widehat{ABC}} = \frac{AC}{AB}$$



B) Propriétés

Propriété

Soit α un angle aigu d'un triangle rectangle. On a les propriétés suivantes.

$$0 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1$$

Notation

$$\cos(\alpha) \times \cos(\alpha) = \cos^2(\alpha)$$

Propriété

Soit α un angle aigu d'un triangle rectangle. On a :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Démonstration Exercice 13

Propriété Soit α un angle aigu d'un triangle rectangle. On a : $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

Démonstration Exercice 14

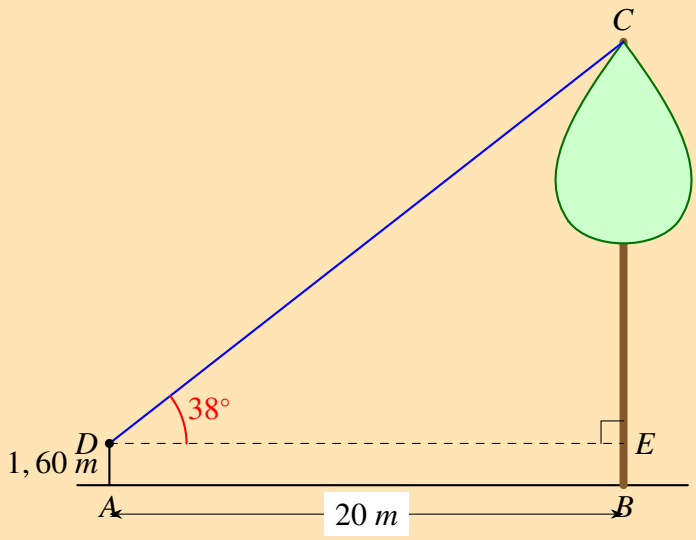
V) Quelques valeurs remarquables

Angle α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

VI) Problème : mesurer la hauteur d'un arbre

Exercice

Un géomètre souhaite déterminer la hauteur d'un arbre sans avoir à y grimper.
Il se place à 20 mètres du pied de l'arbre. À l'aide d'un instrument, placé à 1,60 m du sol, il mesure un angle de 38° entre l'horizontale et la direction du sommet de l'arbre.



a) Calculer la longueur EC, arrondie au centimètre près.

b) En déduire la hauteur totale BC de l'arbre.

c) Calculer la distance DC entre l'instrument et le sommet de l'arbre, arrondie au centimètre près.