Géométrie dans l'espace

I) Droites et plans de l'espace

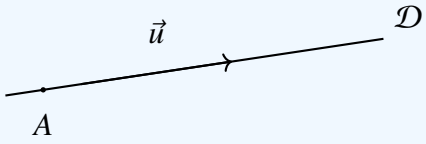
Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace sur laquelle on considère deux points distincts A et B.
$\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de $\mathcal{D}$ ainsi que tout vecteur non nul $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.



Notation

La droite $\mathcal{D}$ passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ peut se noter $(A\,;\,\vec{u})$.



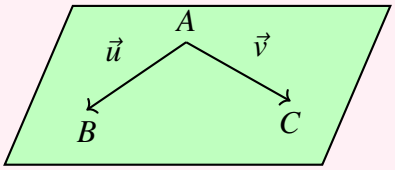
Définition

Dans l'espace, soient A un point et $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ un couple de vecteurs <u>non</u> colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$ (avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est un **plan** de l'espace que l'on peut noter $(A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$.

On dit alors que $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$ est une **base de la direction** de ce plan.

Si B et C sont les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors on peut aussi nommer ce plan (ABC).



Propriété

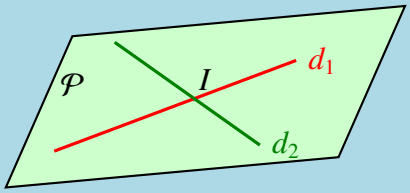
Avec les notations précédentes, on a :

$$M \in (A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}) \iff \exists(\alpha\,;\,\beta) \in \mathbb{R}^2\,;\ \overrightarrow{AM} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$$

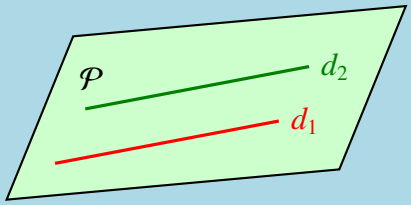
Propriété

Deux droites sécantes déterminent un unique plan.

Deux droites strictement parallèles déterminent également un unique plan.



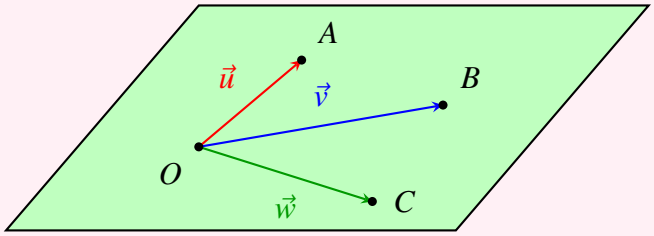
Deux droites sécantes



Deux droites strictement parallèles

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Si O, A, B et C sont des points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ alors on dit que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** si O, A, B et C le sont.



Remarques

— Deux vecteurs non nuls de l'espace sont nécessairement coplanaires.

— Quatre vecteurs ou plus peuvent aussi être coplanaires.

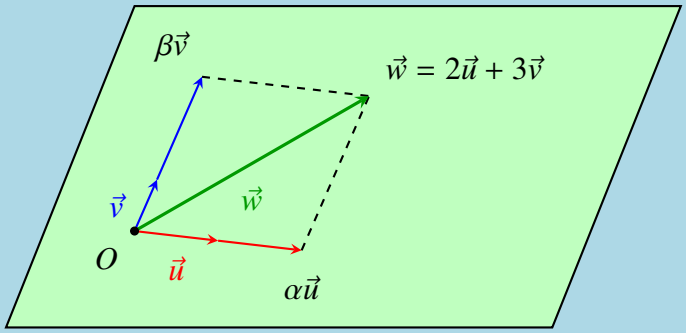
— Si **trois** vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de l'espace.

Propriété

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. Soit $\vec{w}$ un troisième vecteur.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe $(\alpha\,;\,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\vec{w} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v}$$



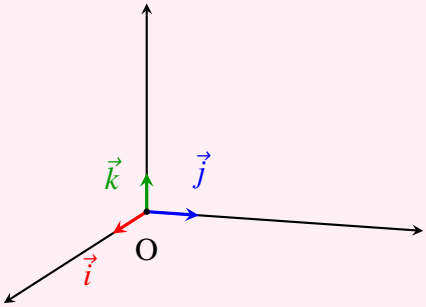
Exercice

Vérifier que $\vec{u}\,(3\,;\,-5\,;\,7)$, $\vec{v}\,(-2\,;\,-4\,;\,6)$ et $\vec{w}\,(-17\,;\,10\,;\,-13)$ sont coplanaires.

II) Repérage dans l'espace

Définition

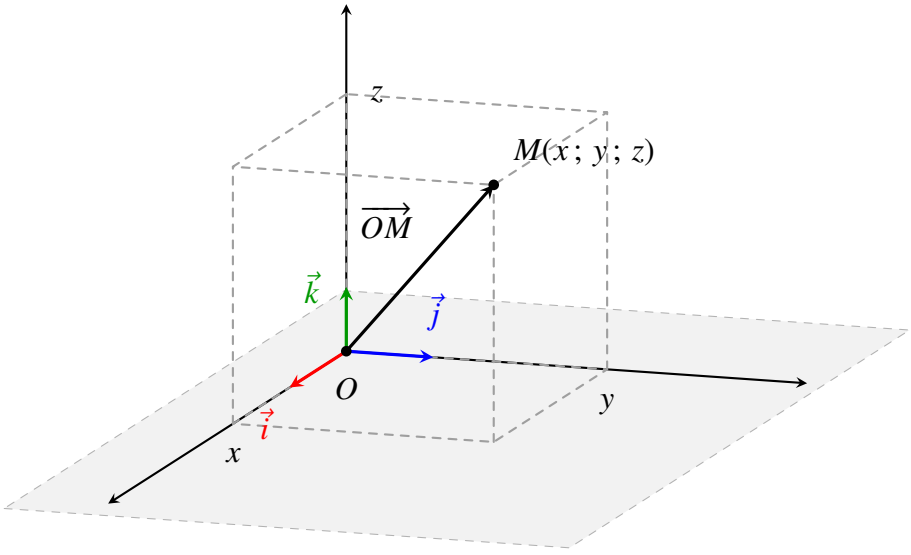
Soient O un point et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires. $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ constitue un repère de l'espace.



Propriété

Soit $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

- Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que :
  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. M a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans le repère. On note : $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que :
  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans le repère.



Remarques

- x est l'abscisse, y est l'ordonnée, z est la **cote**.
- Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit **orthogonal**.
- Si en plus $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont de norme 1, le repère est dit **orthonormé**.

Propriété

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ on considère les points $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ et leur milieu I. Alors :

- $\overrightarrow{AB}\,(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A\,;\,z_B - z_A)$
- $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A + y_B}{2}\,;\,\dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$

Si de plus $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$ est orthonormé, alors :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Propriété

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

III) Produit scalaire dans l'espace

Définition

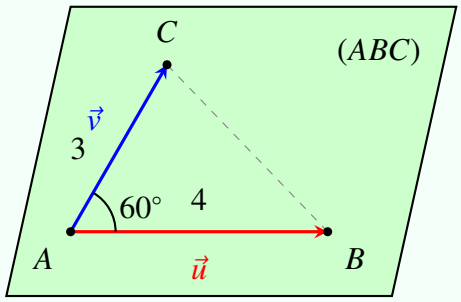
Produit scalaire dans l'espace

On considère trois points non alignés A, B et C et on note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le même que le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan (ABC).

Exemple

On considère trois points A, B et C de l'espace tels que $AB = 4$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60°$.



Le produit scalaire des deux vecteurs se calcule dans le plan (ABC) :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= 4 \times 3 \times \cos(60°) \\ &= 12 \times \frac{1}{2} \\ &= \boxed{6}.\end{aligned}$$

Remarque

Le produit scalaire dans l'espace étant le même que celui dans le plan, il possède donc les mêmes propriétés.

Propriété

Rappels de quelques propriétés algébriques
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et λ un réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \lambda \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda \times \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de l'espace dans un repère orthonormé. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$

Remarque

La première formule est notamment utile pour calculer la mesure d'un angle dans l'espace.

IV) Orthogonalité dans l'espace

Propriété

Orthogonalité Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Alors :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Démonstration

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \iff \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 0 \iff (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

Définition

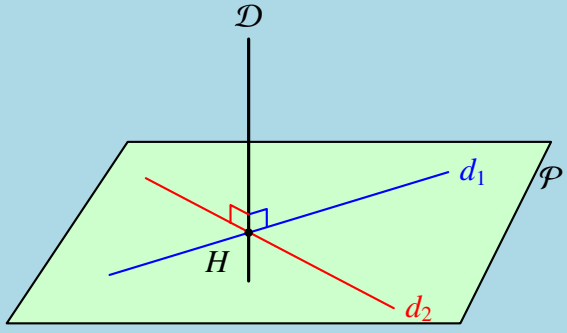
— Deux droites de l'espace sont dites **orthogonales** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

— Deux droites de l'espace sont dites **perpendiculaires** si elles sont orthogonales et sécantes.

— Une droite de l'espace est **perpendiculaire** à un plan si elle est orthogonale à toutes ses droites.

Propriété

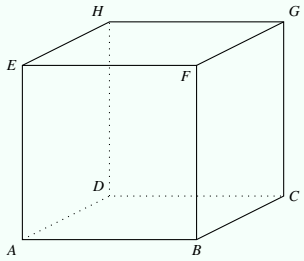
Une droite de l'espace est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre :

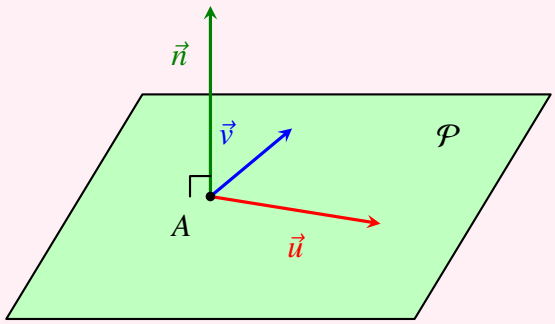
- Les droites (AE) et (AB) sont perpendiculaires (donc orthogonales).
- Les droites (AE) et (DC) sont orthogonales (mais pas perpendiculaires).
- La droite (BF) est perpendiculaire (donc orthogonale) au plan (EFG).



V) Vecteur normal et produit vectoriel

Définition

On considère un plan $(A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$. On dit qu'un vecteur **non nul** $\vec{n}$ de l'espace est un **vecteur normal** (ou **orthogonal**) à ce plan s'il est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Remarque

Si $\mathcal{P}$ est un plan et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{n}$ est également normal à $\mathcal{P}$.

Théorème

Un vecteur non nul est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs directeurs de ce plan.

Démonstration

Soit $\mathcal{P} = (A\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v})$ un plan, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.

• Supposons que $\vec{n}$ soit normal au plan $\mathcal{P}$.
Par définition, $\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$ et $\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$.
Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de $\mathcal{P}$. Il existe donc deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
Par linéarité du produit scalaire :

$$\vec{n}\cdot\vec{w} = \vec{n}\cdot(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha(\vec{n}\cdot\vec{u}) + \beta(\vec{n}\cdot\vec{v}) = 0$$

Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $\mathcal{P}$.

• Réciproquement, supposons que $\vec{n}$ soit orthogonal à tous les vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.
En particulier, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
Comme ces deux vecteurs sont non colinéaires et dirigent $\mathcal{P}$, $\vec{n}$ est, par définition, un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

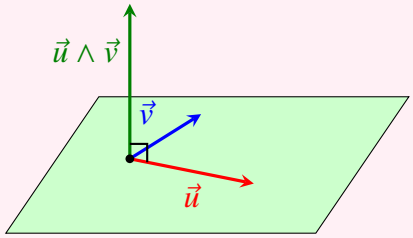
Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté.
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

Sinon, leur **produit vectoriel**, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est l'unique vecteur tel que :

- $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;
- sa norme vaut
$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta,$$
où $\theta \in [0\,;\,\pi]$ est l'angle non orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- la base $(\vec{u}\,;\,\vec{v}\,;\,\vec{u} \wedge \vec{v})$ est directe.



Propriété

Dans un repère orthonormé direct, si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $(\vec{u} \wedge \vec{v})\begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix}$

Remarques

- Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire (un réel) alors que le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur.
- Le produit scalaire permet de savoir si deux vecteurs sont orthogonaux.
- Le produit vectoriel permet de trouver un vecteur normal à deux autres, donc au plan généré par ceux-ci.

Exercice

Dans un repère orthonormé direct, on considère les points $A\,(13\,;\,-1\,;\,0)$, $B\,(5\,;\,2\,;\,-1)$ et $C\,(-3\,;\,3\,;\,3)$.

Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal au plan (ABC).

Propriété

1. $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$
3. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{u}$

VI) Parallélisme dans l'espace

Propriété

Dans l'espace :

— Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

— Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à un plan (ou contenue dans ce plan) $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$

— Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

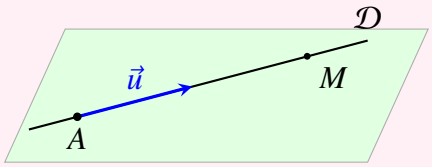
VII) Équations paramétriques d'une droite, d'un plan

Définition

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$, soient un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$.

La droite $(A\,;\,\vec{u})$ est caractérisée par le **système d'équations paramétriques**

$$\begin{cases} x = x_A + k\,a \\ y = y_A + k\,b \\ z = z_A + k\,c \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}$$



$$\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$$

Remarques

— Pour une droite donnée, il existe une infinité de systèmes d'équations paramétriques la caractérisant.

— Dans l'espace, une seule équation cartésienne linéaire à trois inconnues définit un plan, et non une droite.

Une droite peut cependant être définie comme l'intersection de deux plans non parallèles, donc par un système de deux équations cartésiennes.

Propriété

Dans l'espace, une droite peut être définie par un système de deux équations cartésiennes :

$$\Delta : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}$$

à condition que les vecteurs $(a_1\,;\,b_1\,;\,c_1)$ et $(a_2\,;\,b_2\,;\,c_2)$ soient non colinéaires.

La droite est alors l'intersection des deux plans définis par ces équations.

Exercice

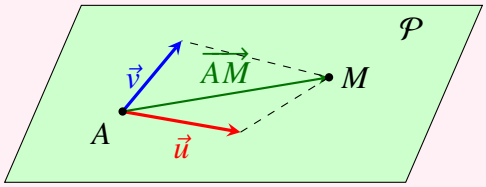
Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$, on considère les points $A\,(3\,;\,-4\,;\,1)$, $B\,(7\,;\,1\,;\,-1)$ et $C\,(-3\,;\,8\,;\,5)$ et un vecteur $\vec{u}\,(-11\,;\,-4\,;\,6)$.

1. Donner des systèmes d'équations paramétriques des droites (AB) et $(C\,;\,\vec{u})$.
2. Montrer que ces deux droites sont sécantes en un point D dont on donnera les coordonnées.
3. (AB) et (CD) sont-elles perpendiculaires ?
4. Calculer AB.

Définition

Dans l'espace muni d'un repère $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$, soient un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et deux vecteurs $\vec{u}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ et $\vec{v}\,(a'\,;\,b'\,;\,c')$ non colinéaires. Le plan $(A\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ est caractérisé par le système d'équations paramétriques

$$(A\,;\,\vec{u},\,\vec{v}) : \begin{cases} x = x_A + k\,a + t\,a' \\ y = y_A + k\,b + t\,b' \\ z = z_A + k\,c + t\,c' \end{cases} \quad , \; k \in \mathbb{R},\; t \in \mathbb{R}$$



Exercice

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$, on considère les points $A\,(3\,;\,-4\,;\,1)$, $B\,(7\,;\,1\,;\,-1)$ et $C\,(-3\,;\,8\,;\,5)$.

Déterminer un système d'équations paramétriques du plan (ABC).

VIII) Angles dans l'espace

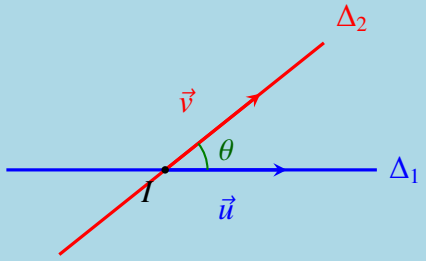
Propriété

Angle entre deux droites

Soient deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
Leur angle aigu ou droit θ vérifie :

$$\cos\theta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.



Propriété

Angle entre deux plans

Soient deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ non nuls.
Leur angle aigu ou droit θ vérifie :

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \, \|\vec{n}_2\|}$$

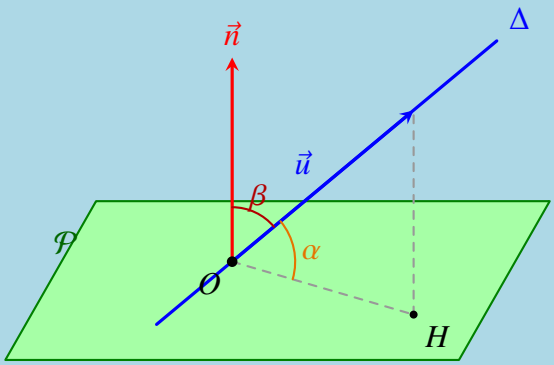
Propriété

Angle entre une droite et un plan

Soient une droite Δ de vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ et un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} \neq \vec{0}$.
Leur angle aigu ou droit α vérifie :

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{n}\|}$$

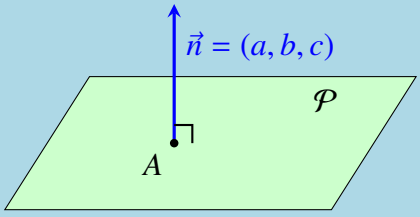
avec $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.



IX) Équation cartésienne d'un plan

Propriété

Tout plan passant par un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$ et $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.



Propriété

Inversement, si $\mathcal{P} : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. alors $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de $\mathcal{P}$.

Exercice

On considère le point $A(1\,;\,3\,;\,2)$ et le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$.

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice

$A\,(5\,;\,6\,;\,-2)$, $B\,(3\,;\,1\,;\,-1)$ et $C\,(4\,;\,-2\,;\,-2)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

X) Intersection d'une droite et d'un plan

Propriété

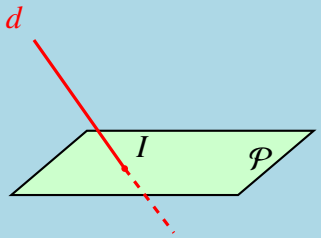
Dans l'espace, une droite Δ et un plan $\mathcal{P}$ peuvent avoir :

— un unique point commun : la droite est sécante au plan ;

— aucun point commun : la droite est strictement parallèle au plan ;

— une infinité de points communs : la droite est contenue dans le plan.

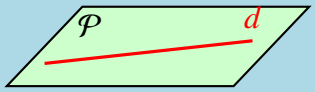
Pour déterminer leur intersection, on remplace les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation cartésienne du plan.



Droite sécante au plan



Droite strictement parallèle au plan



Droite contenue dans le plan

Exercice

Dans un repère orthonormé, on considère la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ définis par :

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

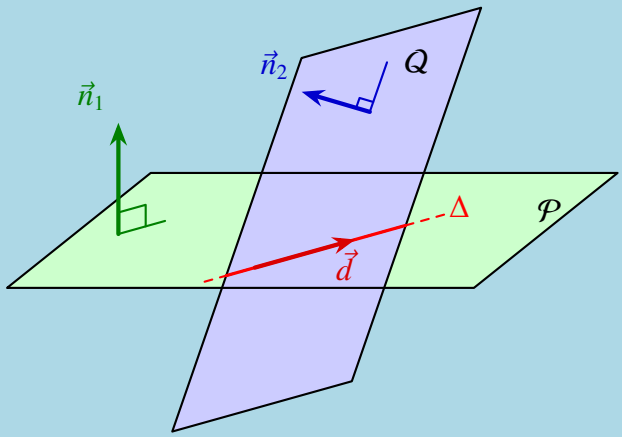
$$\mathcal{P} : 2x - y + z + 1 = 0$$

Déterminer leur intersection.

XI) Intersection entre deux plans

Propriété

L'intersection de deux plans non parallèles est une droite dont un vecteur directeur est le produit vectoriel des vecteurs normaux des deux plans.



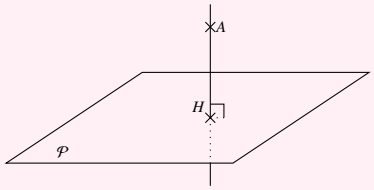
Exercice

Vérifier que les plans $\mathcal{P} : 2x + 3y - 5z + 1 = 0$ et $\mathcal{Q} : 3x - 2z - 4 = 0$ ne sont pas parallèles et déterminer leur intersection.

XII) Distance d'un point à un plan

Définition

Le **projeté orthogonal** d'un point A sur un plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par A.



Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère un point $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et un plan

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0.$$

Le projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_H = x_A - \lambda a \\ y_H = y_A - \lambda b \\ z_H = z_A - \lambda c \end{cases}$$

avec

$$\lambda = \frac{ax_A + by_A + cz_A + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Exercice

Dans un repère orthonormé, on considère le point $A(2\,;\,-1\,;\,4)$ et le plan

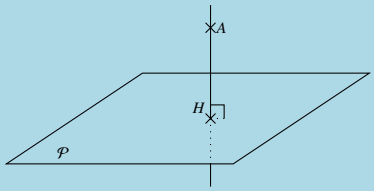
$$\mathcal{P} : 2x - y + 2z - 4 = 0.$$

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Propriété

Dans l'espace, on considère un plan $\mathcal{P}$ et un point A tel que $A \notin \mathcal{P}$. Soit alors H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

AH est la distance minimale entre A et un point de $\mathcal{P}$. C'est la **distance du point A au plan $\mathcal{P}$**.



Exercice

Déterminer la distance dans l'espace muni d'un repère orthonormé entre le point $K\,(2\,;\,1\,;\,3)$ et le plan $\mathcal{F} : x - 3\,y - 2\,z - 1 = 0$.

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère $A\,(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $\mathcal{P} : a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

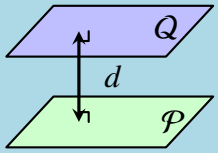
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est : $\quad d\,(A\,;\,\mathcal{P}) = \dfrac{|a\,x_A + b\,y_A + c\,z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

XIII) Distance entre deux plans

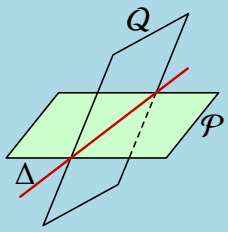
Propriété

— La distance entre deux plans confondus ou non parallèles est nulle.

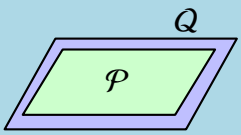
— La distance entre deux plans parallèles est la distance d'un point quelconque de l'un des plans à l'autre.



Plans parallèles



Plans sécants : $d = 0$



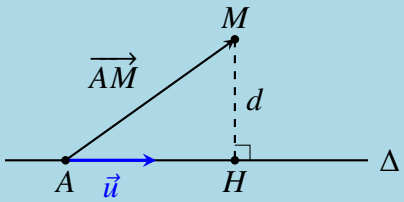
Plans confondus : $d = 0$

XIV) Distance d'un point à une droite

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère un point M et une droite $\Delta : (A\,;\,\vec{u})$ où $A \in \Delta$ et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ.

La distance du point M à la droite Δ est : $\displaystyle d(M\,;\,\Delta) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$



Exercice

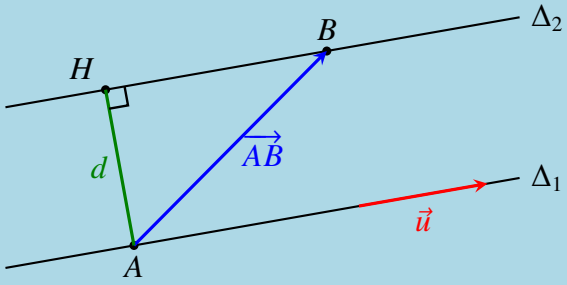
Déterminer la distance dans l'espace muni d'un repère orthonormé entre le point $R(12\,;\,-1\,;\,-3)$ et la droite $\mathcal{D} : (B\,;\,\vec{u})$ avec $B(1\,;\,2\,;\,1)$ et $\vec{u}(2\,;\,-3\,;\,4)$.

XV) Distance entre deux droites

Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère deux droites **parallèles** Δ_1 et Δ_2, de vecteur directeur commun $\vec{u} \neq \vec{0}$.
Soient $A \in \Delta_1$ et $B \in \Delta_2$.
La distance entre ces deux droites est :

$$d(\Delta_1\,;\,\Delta_2) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

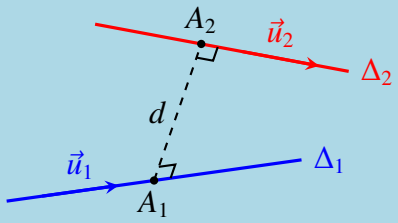


Propriété

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct, on considère les droites Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{u}_1$ et Δ_2 passant par A_2 et de vecteur directeur $\vec{u}_2$, avec $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ **non colinéaires**.

La distance entre les droites Δ_1 et Δ_2 est :

$$d(\Delta_1 ; \Delta_2) = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2)|}{\|\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2\|}$$



Exercice

Déterminer la distance dans l'espace muni d'un repère orthonormé entre les droites suivantes.

$$d : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 - 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \qquad \Delta : \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = -4k \\ z = -1 + 5k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

XVI) Produit mixte et coplanarité

Définition

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On appelle **produit mixte** de ces trois vecteurs le nombre réel défini par :

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}}$$

Il s'agit du produit scalaire du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ par le vecteur $\vec{w}$.

Exemple

On considère les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Donc le produit mixte vaut :

$$\boxed{(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 3 = 6.}$$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Ces trois vecteurs sont coplanaires si et seulement si leur produit mixte est nul :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$$

En particulier, quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si :

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

Exemple

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(3;1;2)$, $C(2;2;3)$ et $D(4;3;3)$.
Montrons que les points A, B, C et D sont coplanaires.

On a :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons le produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 - 0 \times 2 \\ 0 \times 1 - 2 \times 1 \\ 2 \times 2 - 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit le produit mixte :

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} &= 1 \times 3 - 2 \times 3 + 3 \times 1 \\ &= 3 - 6 + 3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

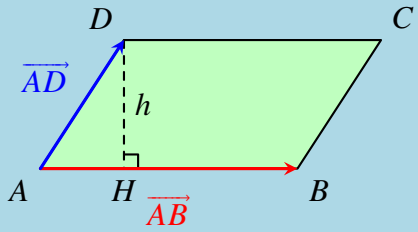
Le produit mixte étant nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
Ainsi, les quatre points A, B, C et D sont coplanaires.

XVII) Aires et volumes

Propriété

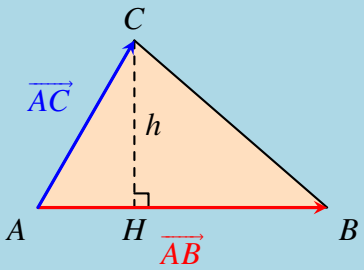
— L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ de l'espace vaut :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\|$$



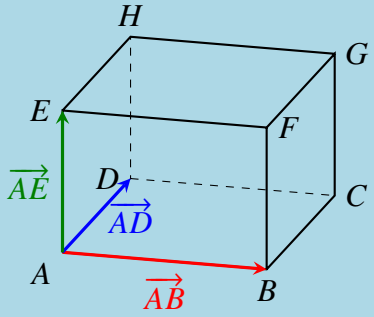
— L'aire d'un triangle ABC de l'espace vaut :

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$



— Le volume d'un parallélépipède $ABCDEFGH$ vaut :

$$\mathcal{V} = \left|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\right|$$



Exercice

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(0;0;0), \quad B(2;0;0), \quad D(0;3;0), \quad E(1;1;4).$$

Calculer le volume du parallélépipède $ABCDEFGH$.