Complexes Correction Exercice 13

1. **Forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$**

   On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z_2 :

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}\\ &= \frac{(1+i\sqrt{3})(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}\\ &= \frac{2+2\sqrt{3}+i(2\sqrt{3}-2)}{8}\\ &= \boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\,\frac{\sqrt{3}-1}{4}}.\end{aligned}$$

2. **Formes trigonométriques**

   Pour $z_1 = 1+i\sqrt{3}$:

$$|z_1| = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2.$$

   Comme $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$\boxed{z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}.$$

   Pour $z_2 = 2+2i$:

$$|z_2| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}.$$

   Comme $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on obtient :

$$\boxed{z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}.$$

   On en déduit :

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \pmod{2\pi}.$$

   Ainsi :

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}.$$

3. **Valeurs exactes**

   En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux formes de $\dfrac{z_1}{z_2}$, on obtient :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}.$$

   Finalement :

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}.$$