Prébac 2024 – Correction rapide des exercices

Section FR A – Sans calculatrice

Correction de l'exercice A2 – 6 points

a) On considère $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+2x-80}$.

On résout $x^2+2x-80=0$, $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times(-80) = 324$, on trouve $x_1 = \frac{-2-\sqrt{324}}{2} = -10$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{324}}{2} = 8$.

Ainsi

$$x^2+2x-80 = (x+10)(x-8).$$

Le domaine de définition est donc $\mathbb{R}\setminus\{-10;8\}$. On montre assez rapidement que $\lim\limits_{x\to 8^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -10^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -10^-} f(x) = +\infty$. Ainsi les droites

$$\boxed{x=-10 \quad \text{et} \quad x=8}$$

sont des asymptotes verticales. De plus, le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, on montre assez rapidement que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

La droite $\boxed{y=0}$ est une asymptote horizontale.

Il n'y a pas d'asymptote oblique car la fonction f est de la forme $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $deg(P)=1$ et $deg(Q)=2$.

b) On a

$$\frac{ax^2+bx+2}{x-1} - (x+6) = \frac{ax^2+bx+2-(x+6)(x-1)}{x-1}$$

$$= \frac{ax^2+bx+2-x^2+x-6x+6}{x-1} = \frac{x^2(a-1)+x(b-5)+8}{x-1}.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) - (x+6) = 0$ donc

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(a-1)+x(b-5)+8}{x-1} = 0$$

Pour que la limite soit nulle, il faut que le numérateur soit de degré strictement inférieur à celui du dénominateur.

On doit donc avoir :

$$a-1=0 \qquad \text{et} \qquad b-5=0.$$

D'où

$$\boxed{a=1 \quad \text{et} \quad b=5}.$$

Correction de l'exercice A3 – 5 points

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x+a}$ sur un intervalle où $2x+a$ ne s'annule pas est $\dfrac{1}{2}\ln|2x+a|$. Pour que l'intégrale soit définie, il faut $a \notin [-14;-6]$. On obtient

$$\int_3^7 \frac{1}{2x+a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{14+a}{6+a}\right| = \ln 3.$$

Ainsi,

$$\ln\left|\frac{14+a}{6+a}\right| = 2\ln 3 = \ln 9.$$

Donc

$$\left|\frac{14+a}{6+a}\right| = 9.$$

Comme $14+a$ et $6+a$ sont de même signe sur les domaines admissibles, leur quotient est positif :

$$\frac{14+a}{6+a} = 9 \iff 14+a = 54+9a \iff 8a = -40.$$

Donc $\boxed{a=-5}$. Cette valeur convient puisque $2x-5>0$ pour $x \in [3;7]$.

Correction de l'exercice A5 – 5 points

a) Par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}39 - (-0{,}25) = \boxed{0{,}64}.$$

b) Une intégration par parties avec $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$ donne

$$\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Par conséquent,

$$\int_1^2 x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2\ln 2 - 1) - \left(-\frac{1}{4}\right) = \boxed{2\ln 2 - \frac{3}{4}}.$$

Correction de l'exercice A8 – 6 points

Les courbes $y = x^2$ et $y = \dfrac{1}{x^2}$ se coupent lorsque

$$x^2 = \frac{1}{x^2} \iff x^4 = 1.$$

Sur $]0;+\infty[$, l'unique solution est $x = 1$. La région grisée est située sous x^2 entre 0 et 1, puis sous $1/x^2$ entre 1 et u.

a) Pour $u > 1$, son aire est

$$\begin{aligned} A(u) &= \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^u \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^u = \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{u}. \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{A(u) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{u}}$.

b) On résout

$$A(u) = 1 \iff \frac{4}{3} - \frac{1}{u} = 1 \iff \frac{1}{u} = \frac{1}{3} \iff \boxed{u = 3}.$$

Cette valeur vérifie bien $u > 1$.

c) Puisque $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{u} = 0$, on a

$$\boxed{\lim_{u\to+\infty} A(u) = \frac{4}{3}}.$$

L'aire tend donc vers la valeur limite $\dfrac{4}{3}$ unité d'aire.