# Notes de correction du devoir - Intégration

S7MA5 – 2026-2027

## Exercice 1 (4 points)

**Calcul de $A$ :** **(2 points)**

$$A = \int_0^2 (3x^2 - 4x + 1)\, dx.$$

Une primitive de $3x^2 - 4x + 1$ est :

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

Ainsi :

$$A = \left[x^3 - 2x^2 + x\right]_0^2 = (8 - 8 + 2) - 0 = \boxed{2}.$$

**Calcul de $B$ :** **(2 points)**

$$B = \int_0^1 2xe^{x^2+1}\, dx.$$

On reconnaît une expression de la forme $u'(x)e^{u(x)}$, avec :

$$u(x) = x^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad u'(x) = 2x.$$

Une primitive est donc :

$$F(x) = e^{x^2+1}.$$

Ainsi :

$$B = \left[e^{x^2+1}\right]_0^1 = e^2 - e = \boxed{e^2 - e}.$$

## Exercice 2 (5 points)

On considère :

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{(x^2+2)^2}\, dx.$$

**1. Changement de variable**

Posons :

$$u = x^2 + 2.$$

Alors :

$$du = 2x\, dx.$$

Les nouvelles bornes sont :

$$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow u = 2, \\ x = 1 \Longrightarrow u = 3. \end{cases}$$

**2. Calcul de l'intégrale**

L'intégrale devient :

$$I = \int_2^3 \frac{1}{u^2}\, du.$$

Or :

$$\frac{1}{u^2} = u^{-2}.$$

Une primitive de $u^{-2}$ est $-u^{-1}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{u}\right]_2^3 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \boxed{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

**Exercice 3 (6 points)**

On considère :

$$f(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x + 2.$$

**1. Points d'intersection** **(2 points)**

Les courbes se coupent lorsque :

$$f(x) = g(x).$$

Donc :

$$\begin{aligned} x^2 &= x + 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$x = -1 \qquad \text{ou} \qquad x = 2.$$

Les ordonnées correspondantes sont :

$$f(-1) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(2) = 4.$$

Les points d'intersection sont :

$$\boxed{A(-1;1) \quad \text{et} \quad B(2;4)}.$$

**2. Position relative des courbes** **(2 points)**

Étudions le signe de $f(x) - g(x)$ :

$$f(x) - g(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1).$$

Sur $[0;3]$, on a $x + 1 > 0$.
Le signe de $f(x) - g(x)$ est donc celui de $x - 2$.
Ainsi :

- Sur $[0;2]$, $f(x) \leq g(x)$.
- Sur $[2;3]$, $f(x) \geq g(x)$.

Les courbes changent donc de position relative en $x = 2$.

**3. Calcul de l'aire** **(2 points)**

On doit séparer le calcul en deux intégrales :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx + \int_2^3 (f(x) - g(x))\,dx.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^2 (x+2-x^2)\,dx \\ &\quad + \int_2^3 (x^2-x-2)\,dx.\end{aligned}$$

Calculons la première intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 2+4-\frac{8}{3} \\ &= \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

Calculons la seconde intégrale :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 &= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_2^3 \\ &= \left(9-\frac{9}{2}-6\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right) \\ &= -\frac{3}{2}+\frac{10}{3} \\ &= \frac{11}{6}.\end{aligned}$$

L'aire totale est donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{10}{3}+\frac{11}{6} \\ &= \frac{20}{6}+\frac{11}{6} \\ &= \boxed{\frac{31}{6}}.\end{aligned}$$

**Exercice 4 (5 points)**

On considère :

$$J = \int_0^1 (2x+1)e^{-x}\,dx.$$

On utilise une intégration par parties.
Posons :

$$u(x) = 2x+1 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = e^{-x}.$$

Alors :

$$u'(x) = 2 \qquad \text{et} \qquad v(x) = -e^{-x}.$$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v.$$

Ainsi :

$$J = \left[-(2x+1)e^{-x}\right]_0^1 \quad + 2\int_0^1 e^{-x}\,dx.$$

On obtient :

$$J = \left(-\frac{3}{e}+1\right)+2\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 1-\frac{3}{e}+2\left(1-\frac{1}{e}\right) = 1-\frac{3}{e}+2-\frac{2}{e} = \boxed{3-\frac{5}{e}}.$$