Chapitre 03 : Dérivation

Der01 : Déterminer un nombre dérivé d'une fonction en un point par le calcul
Der02 : Connaître et utiliser les dérivées des fonctions usuelles, calculer des dérivées secondes
Der03 : Utiliser les formules de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée
Der04 : Utiliser l'interprétation graphique d'un nombre dérivé notamment pour déterminer une équation de tangente
Der05 : Interpréter le nombre dérivé et dérivée seconde en contexte : coût marginal, vitesse instantanée, accélération etc...

Kholles :

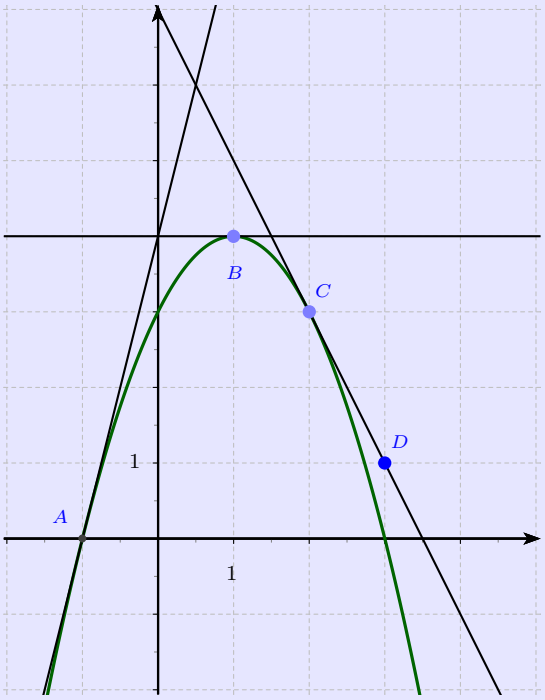
Exercices n°

Méthode : Déterminer un nombre dérivé d'une fonction en un point par le calcul

- Pour lire graphiquement un nombre dérivé, il faut le lire le coefficient directeur de la tangente correspondante.
- Pour calculer un nombre dérivé, on commence par calculer le taux d'accroissement, pus on cherche sa limite en 0.

exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
La représentation graphique de f est donnée ci-contre ainsi que trois de ses tangentes, aux point A, B et C, d'abscisses respectives -1, 1 et 2.

1. Déterminer par lecture graphique les nombres dérivés de f en -1, 1 et 2.
2. (a) Déterminer le taux d'accroissement $\tau(h)$ de la fonction f en 3.
   (b) En déduire que f est dérivable en 3 et calculer $f'(3)$.



solution :

1. $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1, i-e A. Ainsi $f'(-1) = 4$.
   De la même façon, on lit les coefficients directeurs des tangentes B et C : $f'(1) = 0$
2. (a) $\tau(h) = \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$
   $= \dfrac{-(3+h)^2 + 2(3+h) + 3 - 0}{h}$
   $= \dfrac{-9 - 6h - h^2 + 6 + 2h + 3}{h}$
   $= \dfrac{-h^2 - 4h}{h}$
   $= -h - 4.$
   (b) Il est clair que $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = -4$ donc f est dérivable en 3 et $f'(3) = -4$.

exemple : On considère la fonction g définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x-1}$.

1. Montrer que le taux d'accroissement de la fonction g en 1 s'exprime pour tout $h > 0$ par $\tau(h) = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.
2. g est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

solution :

1. $\tau(h) = \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{h} - 0}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.
2. $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h} = 0$ (par valeurs positives), donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = +\infty$ (en effet, l'inverse d'un nombre qui est de plus en plus proche de 0 est de plus en plus grand...)
   On en déduit que la fonction g n'est pas dérivable en 1.

Exercice 1 : Der01
Soit la fonction g, définie sur $]0; +\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{3}{x}$$

1. Montrer que, pour tout réel non nul $h > -1$, le taux de variation de g entre 1 et $1+h$ est égal à $\tau(h) = -\frac{3}{h+1}$.
2. En déduire que la fonction g est dérivable en 1 et préciser la valeur de $g'(1)$.
3. Retrouver ce résultat avec la calculatrice.

Exercice 2 : Der01

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 5x$$

L'objectif est de démontrer que, pour tout réel a, la fonction f est dérivable en a. a désigne donc dans la suite un réel quelconque.

1. Justifier que pour tout réel h non nul,
$$f(a+h) = a^2 + 2ah + h^2 + 5a + 5h$$
2. En déduire que le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est égal à $\tau(h) = 2a + h + 5$.
3. En déduire que la fonction f est dérivable pour tout réel a, et préciser la valeur de $f'(a)$.
4. Calculer les nombres $f'(4)$ et $f'(-2)$.

Exercice 3 : Der01

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 5$$

1. (a) Montrer que, pour tout réel $h \neq 0$, le taux de variation de f entre 4 et $4+h$ est $\tau(h) = -2h - 16$.

   (b) En déduire que la fonction f est dérivable en 4 et préciser la valeur du nombre dérivé de f en 4.
2. Montrer que la fonction f est dérivable en -1. On précisera alors la valeur de $f'(-1)$.
3. Retrouver ces résultats avec la calculatrice.

Méthode : Utiliser les Formules de Dérivation

- Pour dériver une **somme**, on utilise la formule $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$:

  exemple : $f(x) = 3x^2 - 5x + 2 - \frac{1}{x}$
  f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables.
  $f'(x) = 3 \times 2x - 5 + 0 - (-\frac{1}{x^2}) = 6x - 5 + \frac{1}{x^2}$

- Pour dériver un **produit**, on utilise la formule $\boxed{(uv)'=u'v+uv'}$:

  exemple : $g(x) = (3x+1)\sqrt{x}$
  g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables.
  On pose $\begin{cases} u(x) = 3x+1 & u'(x) = 3 \\ v(x) = \sqrt{x} & v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$
  $g'(x) = 3 \times \sqrt{x} + (3x+1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 3x + 1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+3x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$

- Pour dériver un **inverse**, on utilise la formule $\boxed{(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}}$:

  exemple : $h(x) = \frac{1}{5x-2}$
  h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{2}{5}\}$ en tant qu'inverse d'une fonction dérivable.
  On pose $v(x) = 5x - 2$ et $v'(x) = 5$
  $h'(x) = -\frac{5}{(5x-2)^2}$

- Pour dériver un **quotient**, on utilise la formule $\boxed{(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$:

  exemple : $i(x) = \frac{3x+1}{x+2}$
  i est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ en que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
  On pose $\begin{cases} u(x) = 3x+1 & u'(x) = 3 \\ v(x) = x+2 & v'(x) = 1 \end{cases}$
  $i'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x-1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$

- Pour dériver une expression de la forme $\sqrt{ax+b}$, on applique la formule $\boxed{(\sqrt{ax+b})' = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}}$:

  exemple : $j(x) = \sqrt{3x+1}$
  j est dérivable sur $]-\frac{1}{3};+\infty[$ en tant que composée de fonctions dérivables.
  $j'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

- Pour dériver une expression de la forme $(ax+b)^n$, on applique la formule $\boxed{((ax+b)^n)' = na(ax+b)^{n-1}}$:

  exemple : $k(x) = (3x+1)^4$
  k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
  $k'(x) = 4 \times 3(3x+1)^3 = 12(3x+1)^3$.

Exercice 4 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

1°. $f : x \mapsto -7x + 2$ sur $\mathbb{R}$
2°. $g : x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
3°. $h : x \mapsto -\frac{5}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$
4°. $i : x \mapsto 4x^2 + 3\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
5°. $j : x \mapsto 5x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$
6°. $k : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - 8x + 1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 5 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $f : x \mapsto 3x\sqrt{x}$
2°. $g : x \mapsto (4x+2)\sqrt{x}$
3°. $h : x \mapsto (x^3+1)(4x^2 - 5x + 3)$
4°. $i : x \mapsto (4x+2)(5x^2 - 6x)$
5°. $j : x \mapsto 3\sqrt{x}(2x+1)$

Exercice 6 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $f : x \mapsto \frac{1}{2x+3}$
2°. $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-3}$
3°. $h : x \mapsto \frac{1}{3x^2-4x+2}$
4°. $i : x \mapsto \frac{5}{x+2}$
5°. $j : x \mapsto \frac{-3}{2x+5}$

Exercice 7 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $f : x \mapsto \frac{3x}{x-5}$
2°. $g : x \mapsto \frac{1-x}{2x+3}$
3°. $h : x \mapsto \frac{5x-6}{2x}$
4°. $i : x \mapsto \frac{3+2x}{5-x}$
5°. $j : x \mapsto \frac{4x^2-5}{x+2}$

Exercice 8 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $f : x \mapsto \sqrt{4x+3}$
2°. $g : x \mapsto \sqrt{1-6x}$
3°. $h : x \mapsto \sqrt{3x+1}$

Exercice 9 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $f : x \mapsto (2x+5)^3$
2°. $g : x \mapsto (1-3x)^4$
3°. $h : x \mapsto (2x-1)^5$

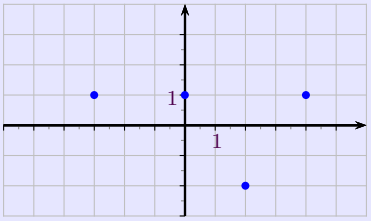
Méthode : Utiliser l'interprétation graphique d'un nombre dérivé et déterminer un équation de tangente

Dans la méthode précédente, on a vu que sur le graphique d'une courbe représentative on pouvait lire des nombres dérivés, et bien on peut faire le cheminement inverse. En effet, si on connait un nombre dérivé de fonction, on en peut en déduire des éléments graphiques et notamment la tangente à la courbe, ça permet d'affiner son tracé.

exemple 1 : Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les égalités suivantes :

$$f(-3)=1 \qquad f(0)=1 \qquad f(4)=1 \qquad f'(-3)=1 \qquad f'(0)=-1 \qquad f'(4)=2$$

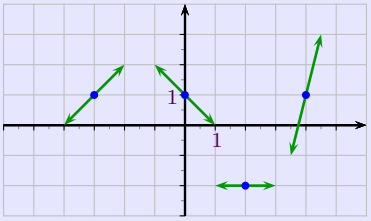
On sait de plus que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A\,(2;-1)$, et qu'en ce point sa tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction f.



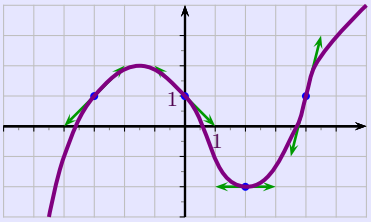
solution :

1. Comme on sait que $f(-3)=1$, $f(0)=1$, et $f(4)=1$, on peut placer les points de coordonnées $(-3;1)$, $(0;1)$ et $(4;1)$. On place également le point $A\,(2;-1)$.

2. On utilise ensuite les conditions $f'(-3)=1$, $f'(0)=-1$ et $f'(4)=2$, pour tracer des tangentes aux point précédemment placés, sans oublier la tangente horizontale au point A.



3. On trace une courbe passant par ces quatre points, qui "épouse" la forme des tangentes.



Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point de cette courbe d'abscisse a :

- on commence par calculer $f(a)$;
- ensuite on calcule $f'(a)$;
- enfin on remplace ces deux valeurs, ainsi que celle de a dans l'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

exemple 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-4x-1$, ainsi que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère.
Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1.

solution :

1. On calcule $f(-1)=2\times(-1)^2-4\times(-1)-1=5$

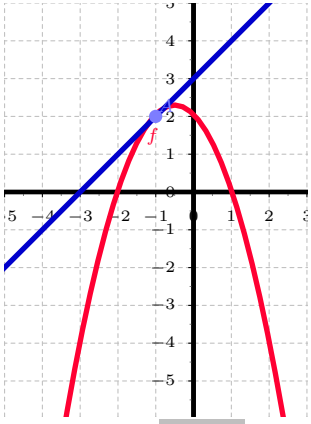
2. On calcule ensuite le taux d'accroissement de f en -1, comme nous avons appris à le faire plus haut ;
   $\tau(h)=\dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\dfrac{2(-1+h)^2-4(-1+h)-1-5}{h}=\dfrac{2(1-2h+h^2)+4-4h-6}{h}=\dfrac{2-4h+2h^2+4-4h-6}{h}=\dfrac{2h^2-8h}{h}=2h-8$
   $\lim\limits_{h\to 0} 2h-8=-8$ donc f est dérivable en -1 et $f'(-1)=-8$
3. On remplace ensuite les trois valeurs dans la formule :
   $y=f'(a)(x-a)+f(a)\Leftrightarrow y=-8(x-(-1))+5\Leftrightarrow y=-8x+8+5\Leftrightarrow \boxed{y=-8x+13}$

On reprend exactement la méthode vue dans le début de chapitre sur le taux d'accroissement, en utilisant les formules pour gagner du temps sur la recherche du nombre dérivé.

exemple 3 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-2x+2$, ainsi que sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

solution :

- On commence par calculer $f(1)=3\times 1^2-2\times 1+2=3$
- On calcule ensuite $f'(x)$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme,
  $f'(x)=6x-2$ on en déduit que $f'(1)=6\times 1-2=4$.
- On remplace les valeurs dans l'équation : $\mathcal{T}: y=f'(a)(x-a)+f(a)\Leftrightarrow y=4(x-1)+3\Leftrightarrow y=4x-4+3\Leftrightarrow \boxed{y=4x-1}$



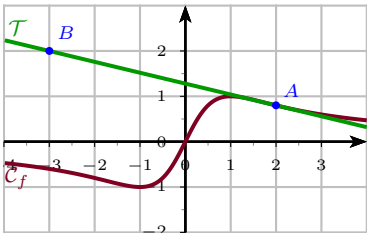
Exercice 10 : Der04

$\mathcal{C}_f$est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. T_A est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A

1. Lire graphiquement le nombre dérivé de f en -1
2. Déterminer une équation de la tangente T_A

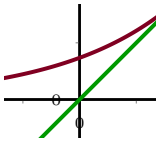
Exercice 11 : Der04

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sur cette courbe on a placé le pont $A\left(2, \frac{4}{5}\right)$. On a également tracé la droite $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en A, et cette droite passe par le point $B(-3, 2)$.
Calculer $f'(2)$.



Exercice 12 : Der04

On a tracé la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Sur cette courbe on a placé le pont $A(1, 1)$. On a également tracé la droite $\mathcal{T}$, tangente à $\mathcal{C}_f$ en A, et cette droite passe par l'origine.
Calculer $f'(1)$.



Exercice 13 : Der04

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0; 4]$ telle que :

$$f(0) = f(2) = f(4) = 1 \text{ et } f(1) = f(3) = -1$$

On donne également :

$$f'(0) = f'(1) = f'(2) = f'(3) = f'(4) = 0$$

Tracer une courbe représentative possible pour f dans un repère.

Exercice 14 : Der04

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; 3]$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	-3	-2	0	$\frac{3}{2}$	3
$f(x)$	-2	0	2	0	-4
$f'(x)$	0	2	0	$-\frac{5}{2}$	0

Tracer une courbe représentative possible pour la fonction f dans un repère.

Exercice 15 : Der04

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-2; -3)$, $B(0; 15)$ et $C(10; 1)$. Les nombres dérivés de f en -2, 0 et 10 sont respectivement égaux à 2, -5 et $-\frac{1}{2}$.
On appelle $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$ les tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement en A, B et C.

1. Déterminer les équations réduites des trois tangentes $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$.
2. Démontrer que ces trois tangentes sont concourantes.

Exercice 16 : Der04

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 3]$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; I; J)$ d'unités 1 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.
2. Calculer $f'(0)$. Que peut-on déduire pour la tangente (d') à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?
3. Tracer les tangentes (d) et (d') puis la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 17 : Der04

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 8$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f, et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2.
Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_2$ en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 18 : Der04

Déterminer une équation réduite de chacune des tangentes suivantes :

1. la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2 $g(x) = -2x^2 + x + 3$
2. la tangente à $\mathcal{C}_j$ au point d'abscisse -1 $j(x) = x^3 - x^2 - x + 1$;
3. la tangente à $\mathcal{C}_n$ au point d'abscisse 2 $n(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$;
4. la tangente à $\mathcal{C}_p$ au point d'abscisse 0. $p(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 1}$

Exercices d'Application

Exercice 19 : Der01

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer si possible $f'(a)$.

a) $f(x) = x^2 - 3x$ $\quad a = 1$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ $\quad a = 0$

c) $h(x) = 3x^2 - 5x + 1$ $\quad a = 1$

d) $i(x) = \sqrt{x+2}$ $\quad a = -2$

e) $j(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad a = 0$

f) $k(x) = x^3 - 1$ $\quad a = 2$

Exercice 20 : Der01

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}+$ par $f(x) = 3\sqrt{x}$.
On admet que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on donne $f'(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(2) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$
Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et 2

Exercice 21 : Der02 Der03 Der04

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 8$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel.

1. Déterminer, en fonction de a, l'équation réduite de la tangente T_A au point d'abscisse a de la courbe de f.
2. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles la tangente T_A est en dessous de la courbe de f ? Si oui, lesquelles ? Justifier la réponse.

Exercice 22 : Der02 Der03 Der04

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soient T et T' les tangentes à la courbe représentative de f respectivement aux points d'abscisses -1 et 1.

1. (a) Déterminer l'équation réduite des tangentes T et T'

(b) Quelle est la position relative des 2 tangentes T et T' ? Justifier.

2. Ce résultat est-il encore valable pour les tangentes à la courbe de f respectivement aux points d'abscisses $-a$ et a où a est un réel strictement positif ? Justifier.

Exercice 23 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1°. $f : x \mapsto 6x + 8$ **2°.** $g : x \mapsto -2x - 5$
3°. $h : x \mapsto 4x^2 + 3x - 6$ **4°.** $i : x \mapsto -3x^2 + 7$
5°. $j : x \mapsto -5x^2 + 2x - 6$ **6°.** $k : x \mapsto 7x^2 + \frac{1}{2}x$
7°. $l : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1$ **8°.** $m : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - 3$
9°. $n : x \mapsto x^4 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{5}{3}$ **10°.** $o : x \mapsto \frac{5}{3}x^6 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$

Exercice 24 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $k : x \mapsto 4x^2 + 3x + x\sqrt{x}$
2°. $l : x \mapsto 3x - (1 + x^2)\sqrt{x}$ **3°.** $m : x \mapsto -5x\sqrt{x} + \frac{2}{x}$
4°. $n : x \mapsto -\frac{6}{x} + 3\sqrt{x} - 5$ **5°.** $o : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2\sqrt{x}$

Exercice 25 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $k : x \mapsto \frac{21}{x^2}$
2°. $l : x \mapsto \frac{2}{x^2-3}$ **3°.** $m : x \mapsto \frac{-7}{3x^3-5x}$
4°. $n : x \mapsto -\frac{3}{\sqrt{x}}$ **5°.** $o : x \mapsto -\frac{6}{x\sqrt{x}}$

Exercice 26 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $k : x \mapsto \frac{3x}{1-x^2}$
2°. $l : x \mapsto \frac{3x^3}{2+x}$ **3°.** $m : x \mapsto \frac{7x+2}{x^2-5}$
4°. $n : x \mapsto \frac{7x^2-3x+2}{2-3x}$ **5°.** $o : x \mapsto \frac{2x^2-3x+2}{x^3-6x+1}$

Exercice 27 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $i : x \mapsto \sqrt{-4x - 6}$
2°. $j : x \mapsto \sqrt{4x - 1}$ **3°.** $k : x \mapsto \sqrt{3x}$

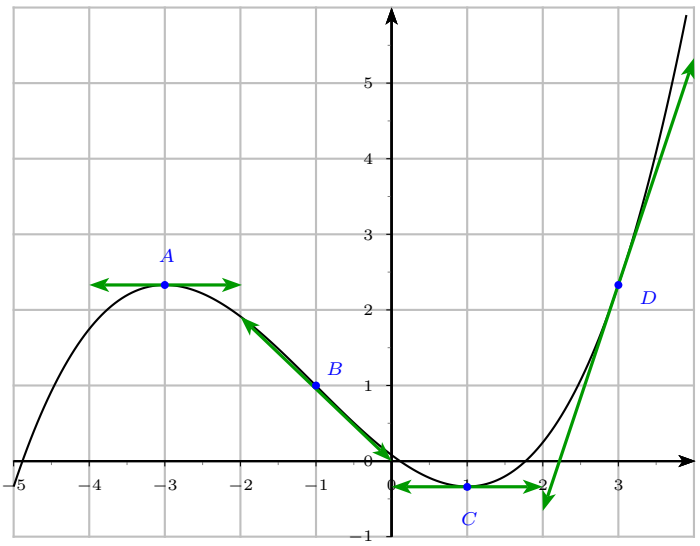
Exercice 28 : Der02 Der03

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes après avoir préciser le domaine de dérivation :

1°. $i : x \mapsto (1 - 6x)^6$
2°. $j : x \mapsto (-4x + 2)^7$ **3°.** $k : x \mapsto (1 + 2x)^7$

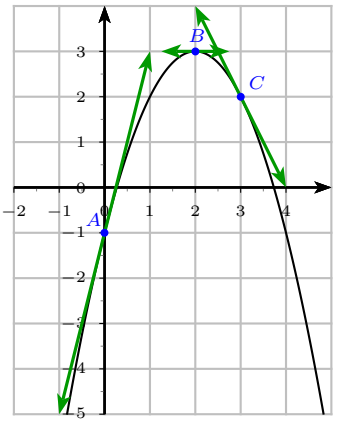
Exercice 29 : Der04

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On a également représenté ses tangentes aux points A, B, C et D, d'abscisses respectives, -3, -1, 1 et 3.
Utiliser le graphique pour déterminer $f'(-3)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'(3)$.



Exercice 30 : Der04

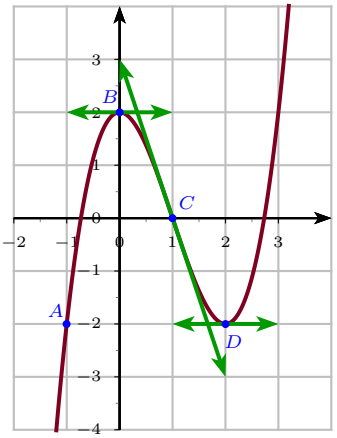
On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
On a également représenté ses tangentes aux points A, B et C, d'abscisses respectives, 0, 2 et 3.



1. Utiliser le graphique pour déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.
2. On donne à présent l'expression de f :
   $f(x) = -x^2 + 4x - 1$
   Calculer $f'(4)$.
3. Construire la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4.

Exercice 31 : Der04

On considère une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.



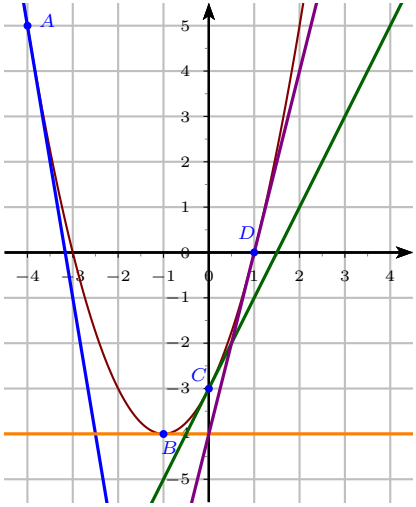
1. Déterminer graphiquement les nombres dérivés correspondant aux tangentes tracées sur le graphique.

2. On donne à présent l'expression de la fonction f :
   $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
   Calculer $f'(-1)$, puis construire la tangente $\mathcal{T}_{-1}$ à $\mathcal{C}_f$ en A.

3. Conjecturer l'existence d'un autre tangente à $\mathcal{C}_f$, qui soit parallèle à $\mathcal{T}_{-1}$.
   Démontrer ce résultat.

Exercice 32 : Der04

On a tracé la courbe d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$, $\mathcal{T}_C$ et $\mathcal{T}_D$, les tangentes à $\mathcal{C}_f$ en A, B, C et D.

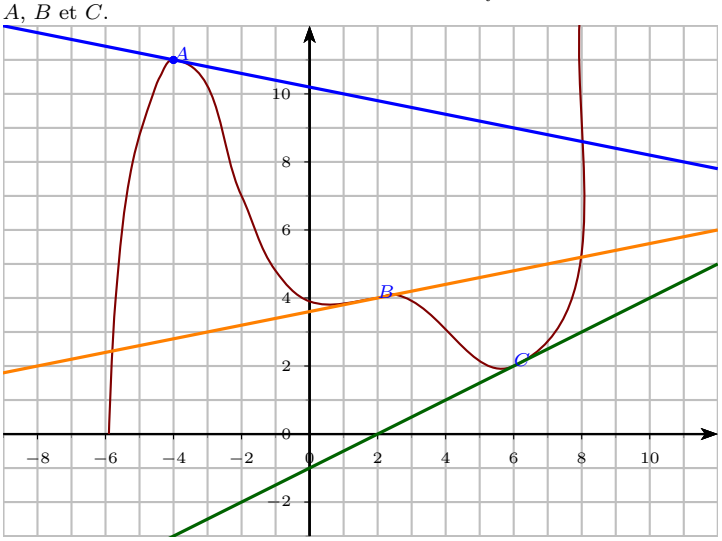


Déterminer par lecture graphique une équation de chacune des tangentes représentées.

Exercice 33 : Der 04

Soit la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ passe par les points $A(-4;11)$, $B(2;4)$ et $C(6;2)$.

Les nombres dérivés de f en -4 ; 2 et 6 sont respectivement -0.2 ; 0.2 et 0.5. On appelle T_A, T_B et T_C les tangentes à $\mathcal{C}_f$ respectivement en A, B et C.



1. Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes T_A, T_B et T_C.
2. Les tangentes T_A, T_B et T_C sont elles concourantes ? Justifier.

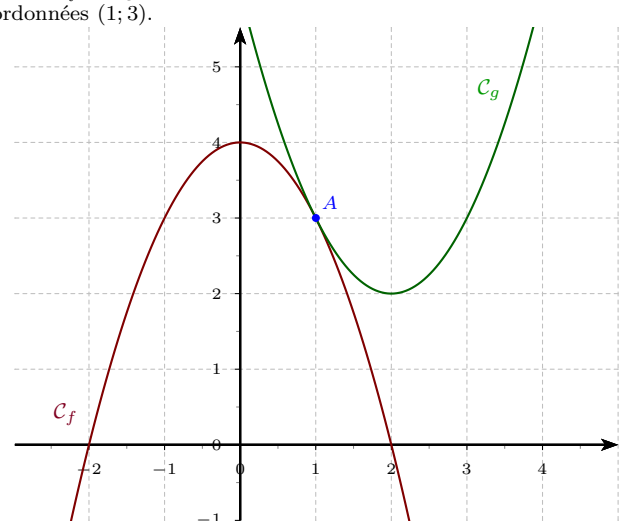
Exercices d'Approfondissement

Exercice 34 : Der04

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x^2 + 4 \text{ et } g(x) = x^2 - 4x + 6$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative, et on note A le point de coordonnées $(1;3)$.



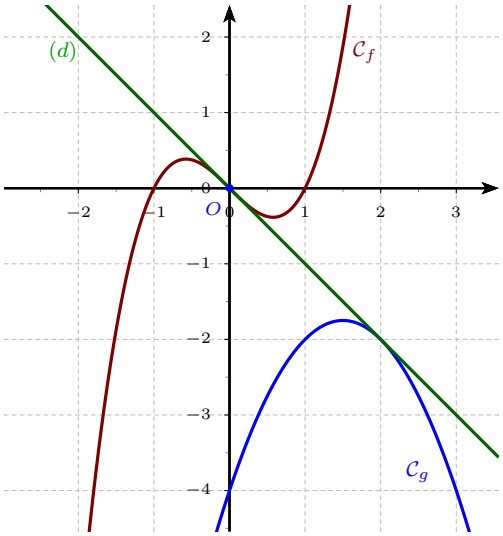
1. Démontrer que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent une tangente commune $\mathcal{T}$ en A.
2. Donner l'équation réduite de cette tangente et la tracer.

Exercice 35 : Der04

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^3 - x \text{ et } g(x) = -x^2 + 3x - 4$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leur courbe représentative et on note (d) la tangente à $\mathcal{C}_f$ en O.



1. Déterminer l'équation réduite de la tangente (d).
2. Démontrer que la droite (d) est aussi tangente à $\mathcal{C}_g$ en un point A dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 36 : Der04

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - x - 2$$

On note également $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère et (d) la droite d'équation réduite $y = 3x + 1$.

1. Construire la courbe représentative de la fonction f.
2. Conjecturer graphiquement l'existence d'une tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ qui soit parallèle à (d).
3. Démontrer votre conjecture par le calcul.

Exercice 37 : Der05

On lâche un caillou du haut du pont. La distance en mètres, parcouru par le calillou en chute libre au bout de t secondes est donnée par $d(t) = 4,9t^2$.

1. Soit t_0 un réel strictement positif. Calculer le taux de variation de la fonction d entre les instants t_0 et $t_0 + h$ (avec $h > 0$).

2. Montrer que la fonction d est dérivable en t_0 et vérifier que $d'(t_0) = 9,8t_0$.
   On admet dans la suite que la vitesse instantanée (exprimée en $m.s^{-1}$) du caillou à l'instant t_0 est égale à $d'(t_0)$.
3. La vitesse du caillou après deux secondes de chute libre est-elle égale au double de elle après une seconde ?

Exercice 38 : Der05

Une entreprise fabrique des granulés pour poêles de chauffage. Sa capacité totale de production ne peut pas dépasser 70 tonnes. Le coût total de fabrication de x tonnes de granulés, en dizaine de milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = 0,02x^2 + 0,08x + 5,08$$

avec $x \in [0; 70]$.

1. (a) Quel est le coût de fabrication exact de 19 tonnes de granulés ? De 20 tonnes de granulés ?
   (b) En déduire l'augmentation de coût entraînée par la fabrication de la vingtième tonne.
   En économie, le coût marginal noté C_m représente le coût engendré par la production d'une tonne supplémentaire lorsque l'on en a déjà fabriqué $x-1$ tonnes. Ainsi $C_m(x) = C(x) - C(x-1)$.
   (c) A l'aide de la calculatrice, calculer $C'(20)$.
   Que remarque -t-on ?
   Les économistes considèrent que, pour des objets fabriqués en grande quantité, $C_m(x)$ peut être approché par le nombre dérivé de la fonction C en x, $C'(x)$.
2. Calculer le coût marginal pour la cinquantième tonne produite. Comparer avec la valeur $C'(50)$.

Exercices d'Algorithmique

Exercice 39 : Der01

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 4$. A et M sont 2 points de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f d'abscisses respectives a et $a + h$ où h est un réel non nul.

On donne la première ligne d'un programme écrit avec Python :

```
liste_h=[10**i for i in range (0, -6, -1)]
```

1. Que contient la variable liste ?
2. Ecrire une fonction Python nommée f avec x en argument qui retourne l'image $f(x)$
3. Compléter la fonction suivante pour qu'elle retourne les coefficients directeurs des sécantes (AM) pour h dans $liste_h$

```
def secante(a,liste_h):
    f_a=f(a)
    coefficients=[... for h in ...]
    return coefficients
```