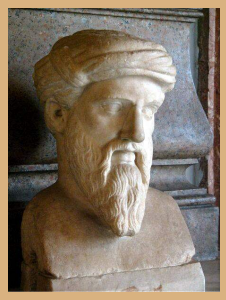
Théorème de Pythagore

Histoire

Aucun écrit authentique de Pythagore ne nous est parvenu et sa vie reste mal connue. Né vers 580 av. J.-C. sur l'île de Samos, il aurait fondé à Crotone, dans le sud de l'Italie, une communauté philosophique et religieuse : **l'école pythagoricienne**. Ses membres étudiaient notamment les mathématiques, l'astronomie et la musique, accordant aux nombres une place fondamentale.

Il est difficile de distinguer les découvertes de Pythagore de celles de ses disciples. Le théorème qui porte son nom était d'ailleurs connu de civilisations plus anciennes ; l'apport des Grecs fut surtout de chercher à **démontrer** les résultats.

L'école pythagoricienne étudia les nombres, la géométrie et les rapports mathématiques en musique. On lui attribue également la découverte des **grandeurs irrationnelles**, notamment avec la diagonale du carré de côté 1, qui mesure $\sqrt{2}$ et ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers.



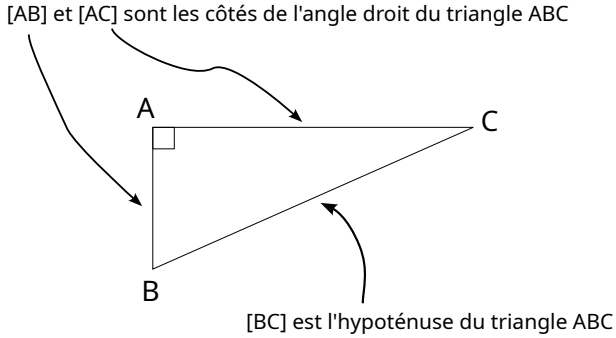
I) Le théorème

A) Vocabulaire

Définition

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit s'appelle l'**hypoténuse** du triangle.

L'hypoténuse est forcément le plus grand côté d'un triangle rectangle.

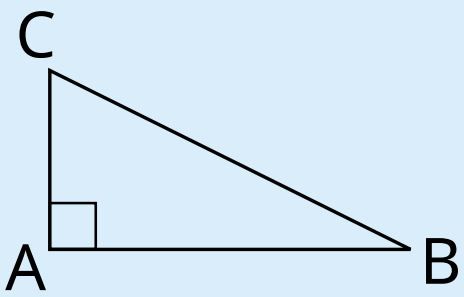


Remarque Un triangle qui n'est pas rectangle n'a pas d'hypoténuse.

B) Théorème de Pythagore

Théorème Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Autre formulation

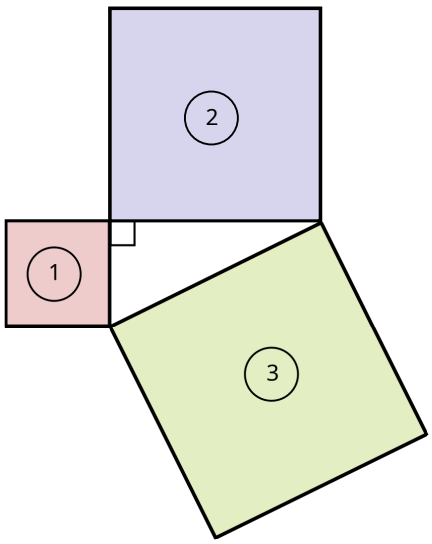


Soit ABC un triangle rectangle en A. Alors on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

Remarque Le théorème de Pythagore peut également s'interpréter comme un résultat sur les aires des carrés construits sur les trois côtés du triangle rectangle.

La figure ci-dessous illustre le théorème de Pythagore.



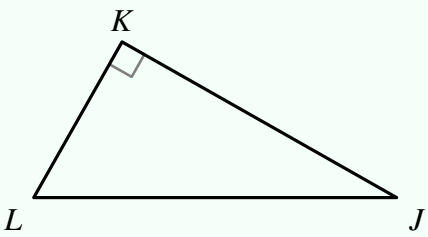
Aire (1) + Aire (2) = Aire (3)

Exemple Le triangle JKL est rectangle en K.

Le côté $[JL]$ est donc l'hypoténuse.

Le théorème de Pythagore nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\boxed{JL^2 = KJ^2 + KL^2}$$



II) Calculs de longueurs

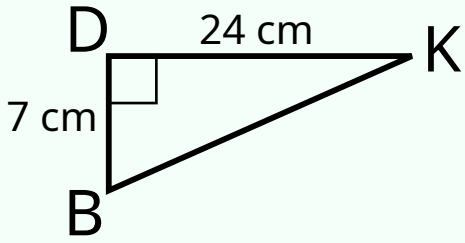
A) Calculer la longueur de l'hypoténuse

Méthode

Pour calculer la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

- on écrit l'égalité de Pythagore ;
- on remplace les longueurs connues par leurs valeurs ;
- on calcule le carré de l'hypoténuse ;
- on utilise la racine carrée pour obtenir sa longueur.

Exemple



Le triangle DBK est rectangle en D, avec $DB = 7\ cm$ et $DK = 24\ cm$.

Le côté $[BK]$ est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BK^2 &= DB^2 + DK^2 \\ &= 7^2 + 24^2 \\ &= 49 + 576 \\ &= 625 \end{aligned}$$

Donc :

$$BK = \sqrt{625} = 25\ cm.$$

Ainsi :

$$\boxed{BK = 25\ cm}$$

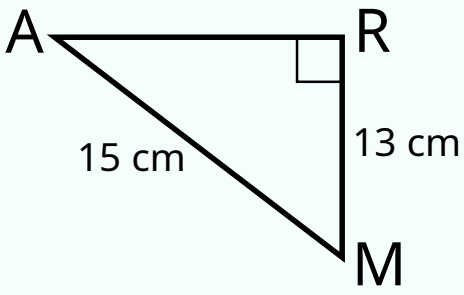
B) Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Méthode

Pour calculer la longueur d'un côté de l'angle droit, on commence également par écrire l'égalité de Pythagore.

On isole ensuite le carré de la longueur recherchée avant d'utiliser la racine carrée.

Exemple



Le triangle ARM est rectangle en R, avec $AM = 15\ cm$ et $RM = 13\ cm$.

Le côté $[AM]$ est l'hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} AM^2 &= RA^2 + RM^2 \\ 15^2 &= RA^2 + 13^2 \\ 225 &= RA^2 + 169 \\ RA^2 &= 225 - 169 \\ &= 56 \end{aligned}$$

Donc :

$$RA = \sqrt{56} \approx 7,5\ cm.$$

Ainsi, au millimètre près :

$$\boxed{RA \approx 7,5\ cm}$$

Attention

Pour utiliser le théorème de Pythagore afin de calculer une longueur, il faut savoir que le triangle est rectangle.

Si nous n'avons pas suffisamment d'informations pour savoir qu'un triangle est rectangle, nous ne pouvons pas appliquer le théorème de Pythagore.

III) Culture mathématique

A) Le triangle 3-4-5

Remarque

Un triangle dont les côtés ont pour longueurs 3, 4 et 5 unités est rectangle.

En effet :

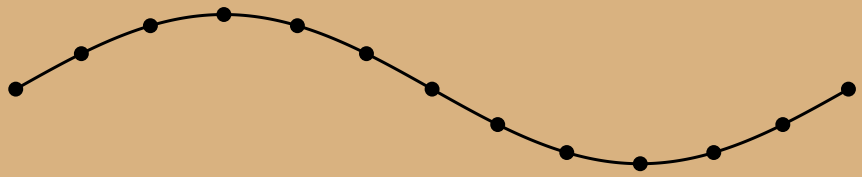
$$5^2 = 3^2 + 4^2$$

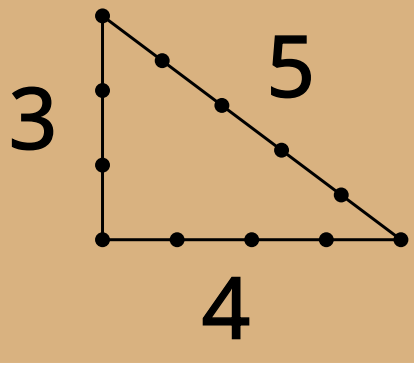
car

$$25 = 9 + 16.$$

Histoire

Nous avons vu que le théorème de Pythagore n'est pas, à proprement parler, une découverte de Pythagore : il était déjà connu des Babyloniens et des Chinois bien avant son époque. Pythagore, ou plus probablement ses disciples, aurait cependant contribué à en établir une formulation générale.
Les Égyptiens connaissaient également les propriétés du triangle rectangle. Ils auraient notamment utilisé une corde à 13 nœuds régulièrement espacés qui, une fois tendue, permet de former un triangle de côtés 3, 4 et 5, et donc de construire un angle droit.
Le principe de cette corde a traversé les siècles : elle était encore utilisée par des maçons au XX^{e} siècle pour vérifier la perpendicularité des murs.





B) Triplets pythagoriciens

Définition

Trois nombres entiers naturels non nuls a, b et c vérifiant

$$a^2 + b^2 = c^2$$

forment un **triplet pythagoricien**.

Exemples

Le triplet

$$3 \ - \ 4 \ - \ 5$$

est un triplet pythagoricien.

Tous ses multiples en sont également, par exemple :

$$30 \ - \ 40 \ - \ 50 \qquad \text{ou} \qquad 21 \ - \ 28 \ - \ 35.$$

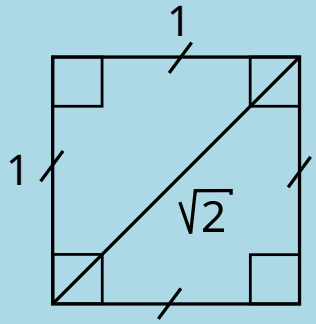
Il existe de nombreux autres triplets pythagoriciens qui ne sont pas des multiples de 3-4-5.

Exercice

Trouver d'autres triplets pythagoriciens qui ne sont pas multiples du triplet 3-4-5.

C) Diagonale d'un carré

Propriété



La diagonale d'un carré de côté 1 *cm* mesure exactement

$$\sqrt{2}\ cm.$$

Plus généralement, la diagonale d'un carré de côté a mesure

$$\boxed{a\sqrt{2}}$$

IV) Contraposée du théorème de Pythagore

Propriété

Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Méthode

Pour démontrer qu'un triangle **n'est pas rectangle** :

- on repère le plus grand côté ;
- on calcule séparément le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres côtés ;
- on compare les deux résultats ;
- s'ils sont différents, on utilise la contraposée du théorème de Pythagore.

Exemple

On considère un triangle RST tel que $RS = 44\ cm$, $RT = 27\ cm$ et $TS = 35\ cm$.
Le triangle RST est-il rectangle ?

$[RS]$ est le plus grand côté du triangle RST.

D'une part : $RS^2 = 44^2 = 1\,936$

D'autre part : $RT^2 + ST^2 = 27^2 + 35^2 = 729 + 1\,225 = 1\,954$

On a donc : $RS^2 \neq RT^2 + ST^2$.
D'après la contraposée du théorème de Pythagore, le triangle RST n'est pas rectangle.

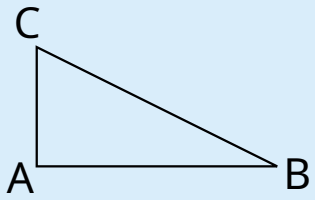
V) Réciproque du théorème de Pythagore

Propriété

Dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est son hypoténuse.

Autre formulation de la propriété

Soit le triangle ci-dessous :



Si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ **alors** le triangle ABC est rectangle en A.

Méthode

Pour démontrer qu'un triangle **est rectangle** :

- on repère le plus grand côté ;
- on calcule séparément le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres côtés ;
- on compare les deux résultats ;
- s'ils sont égaux, on utilise la réciproque du théorème de Pythagore.

Exemple

On considère un triangle RST tel que

$$RS = 29\ cm, \qquad RT = 21\ cm \qquad \text{et} \qquad TS = 20\ cm.$$

Le triangle RST est-il rectangle ?

$[RS]$ est le plus grand côté du triangle RST.

D'une part : $RS^2 = 29^2 = 841$

D'autre part : $RT^2 + ST^2 = 21^2 + 20^2 = 441 + 400 = 841$

On a donc :

$$RS^2 = RT^2 + ST^2.$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore,

le triangle RST est rectangle en T.

Remarque

Le théorème de Pythagore et sa réciproque seront démontrés en classe (et quelques démonstrations supplémentaires sont sur mon site internet).