

Les nombres complexes

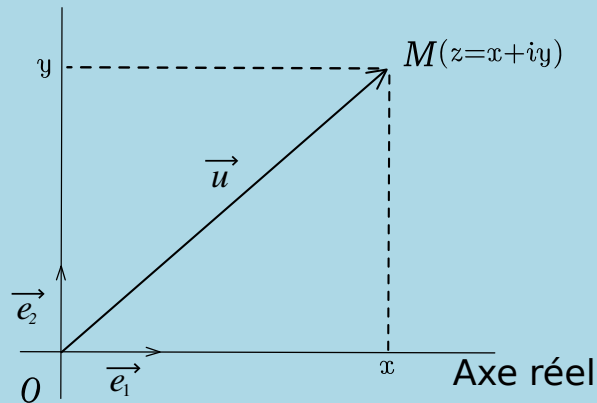
Cette leçon est la deuxième partie sur les nombres complexes. La première partie a été traitée en S6.

I) Représentation graphique

Propriété

Chaque nombre complexe peut être associé à un point du plan muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ orthonormé.

Axe imaginaire



Définition

À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées (x, y) qu'on appelle **image** du complexe $z = x + iy$. On le note souvent $M(z)$.
Inversement, à tout point M du plan de coordonnées (x, y) , on associe son **affixe** $z = x + iy$ que l'on note souvent z_M .
Enfin, à tout vecteur $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est associée une affixe $z_{\vec{u}} = x + iy$.

Exemple

À $z = 2 - 5i$ correspond le point $M(2; -5)$ et réciproquement. L'affixe du point M est le nombre complexe z .

Remarque

La droite passant par O de vecteur directeur $\vec{e}_1$ est appelée l'axe réel (ou axe des réels) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des abscisses).
La droite passant par O de vecteur directeur $\vec{e}_2$ est appelée l'axe imaginaire (ou axe des imaginaires) du plan complexe (cet axe correspond à l'axe des ordonnées).

Exemples

1. L'affixe du point $T(4; -3)$ est le complexe $z_T = 4 - 3i$.
 2. L'image du complexe $z = i - 3$ est le point $M(-3; 1)$.
 3. Dans un plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, déterminons l'affixe de chacun des vecteurs suivants : $\vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_1$ et $-\vec{e}_2$.
- $$z_{\vec{e}_1} = 1 \qquad z_{\vec{e}_2} = i \qquad z_{-\vec{e}_1} = -1 \qquad z_{-\vec{e}_2} = -i$$

Propriété

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, notons z_A l'affixe du point A et z_B l'affixe du point B , alors l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z_B - z_A$.

Démonstration

Notons $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.
On a $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, donc l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $(x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$
D'autre part, $z_B - z_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = x_B - x_A + i(y_B - y_A)$
Par conséquent, l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $z_B - z_A$.

Exemple

L'affixe du vecteur $\vec{AB}$ avec $A(3; 5)$ et $B(5; 8)$ est donc $z = 2 + 3i$.

Propriété

Dans un plan complexe, soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement s'ils ont même affixe.
Autrement dit, $\vec{u} = \vec{v} \iff z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$.
2. L'affixe du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est la somme des affixes des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Autrement dit, $z_{\vec{u} + \vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda \vec{u}$ a pour affixe le produit du réel λ par l'affixe du vecteur $\vec{u}$.
Autrement dit, $z_{\lambda \vec{u}} = \lambda z_{\vec{u}}$.
4. I est le milieu de $[AB] \iff z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
5. La translation de vecteur $\vec{u}$ amène le point $M(z)$ sur le point $M'(z')$ tel que $z' = z + z_{\vec{u}}$.

II) Conjugué d'un nombre complexe

A) Rappels

Définition

On considère un nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y deux réels.
On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que :

$$\bar{z} = x - iy.$$

On dit que z et $\bar{z}$ sont des nombres complexes conjugués.

B) Interprétation géométrique du conjugué

Propriété

Dans le plan complexe, les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Démonstration

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

Son image est le point $M(x; y)$.

Le conjugué de z est $\bar{z} = x - iy$, dont l'image est le point $M'(x; -y)$.

Les points M et M' ont la même abscisse et des ordonnées opposées.

Ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire l'axe des réels.

Exemple

Soit $z = 3 + 2i$.

Son image est le point $M(3; 2)$.

Le conjugué $\bar{z} = 3 - 2i$ a pour image le point $M'(3; -2)$.

Les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

C) Application aux racines des polynômes

Propriété

Soit P un polynôme à coefficients réels.

Si un nombre complexe z est une racine de P , alors son conjugué $\bar{z}$ est également une racine de P .

Autrement dit :

$$P(z) = 0 \implies P(\bar{z}) = 0.$$

Démonstration

Soit P un polynôme à coefficients réels :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

On sait, d'après les propriétés du conjugué étudiées en S6, que le conjugué d'une somme est la somme des conjugués et que $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

De plus, les coefficients a_k étant réels, on a $\overline{a_k} = a_k$.

Par conséquent :

$$\overline{P(z)} = P(\bar{z}).$$

Si z est une racine de P , alors $P(z) = 0$.

Ainsi :

$$P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0.$$

Donc $\bar{z}$ est également une racine de P .

Exemple

On considère le polynôme à coefficients réels :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 8.$$

Vérifier que $2i$ est une racine de P . En déduire une autre racine de P .

On a :

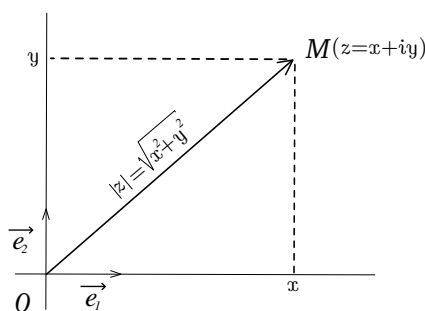
$$\begin{aligned} P(2i) &= (2i)^3 - 2(2i)^2 + 4(2i) - 8 \\ &= -8i + 8 + 8i - 8 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $2i$ est une racine de P .

Puisque P est un polynôme à coefficients réels, son conjugué $-2i$ est également une racine de P .

III) Module et argument d'un nombre complexe

A) Module



Définition

On considère un nombre complexe z , $z = x + iy$ (x et y réels). Le module de z est le nombre réel positif ou nul noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarques

- Si z est l'affixe d'un point M , le module de z n'est autre que la distance OM : $OM = |z|$. Par conséquent, si z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $AB = |z_B - z_A|$.
- On a $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.
- Si $z = x + iy$ est réel ($y = \text{Im}(z) = 0$), on a $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$. Le module d'un nombre réel est donc sa valeur absolue, ce qui justifie la notation.

Exemples

1) Si $z = 3 - 4i$, alors $|z| = 5$. Si $z = 9i$ alors $|z| = 9$.

2) On donne $z_A = -1 + 4i$ et $z_B = 2 - i$. Notons A l'image de z_A et B l'image de z_B ; calculer la distance AB .

Propriété

1. $|z| \geq 0$ pour tout nombre complexe z
2. $|z| = 0 \iff z = 0$
3. Si $z = x + iy$ alors $|z| \geq \max(|x|, |y|)$
4. $|zz'| = |z||z'|$
5. $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (avec $z' \neq 0$)
6. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)

Démonstration

1. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$
2. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$
3. Puisque $x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$, on a $|x| \leq |z|$ et $|y| \leq |z|$. Ainsi $|z| \geq \max(|x|, |y|)$.
- 4.

$$|zz'|^2 = zz' \overline{zz'} = zz' \overline{z} \overline{z'} = z \overline{z} z' \overline{z'} = |z|^2 |z'|^2$$

Comme un module est positif ou nul, on obtient : $|zz'| = |z||z'|$

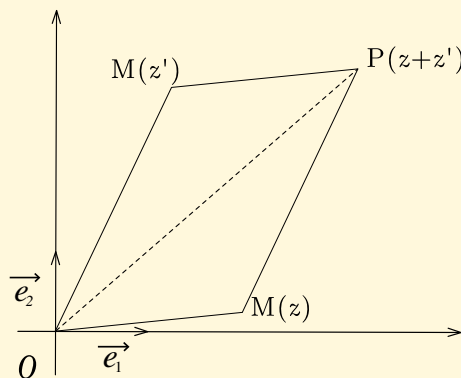
5. Pour $z' \neq 0$, on a

$$\left| \frac{z}{z'} \right|^2 = \frac{z \overline{z}}{z' \overline{z'}} = \frac{z \overline{z}}{z' \overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}$$

Comme un module est positif on obtient : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ ($z' \neq 0$)

6. Pour comprendre l'inégalité triangulaire, il suffit d'observer cette figure :

On a bien $OP \leq OM + OM'$



et donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Exemple

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r . Comme u et v ont le même module et sont distincts, ils sont nécessairement non nuls. Montrer que $\frac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v} \right)} = \frac{\overline{u} + \overline{v}}{\overline{u} - \overline{v}} = \frac{uv\overline{u} + uv\overline{v}}{uv\overline{u} - uv\overline{v}} = \frac{|u|^2 v + u|v|^2}{v|u|^2 - u|v|^2} = \frac{r^2 v + ur^2}{vr^2 - ur^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

Ce qui prouve que $\frac{u+v}{u-v}$ est un imaginaire pur.

Propriété complé- mentaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|z|^2 = z\bar{z}, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad |-z| = |z|, \quad |z^n| = |z|^n.$$

La dernière égalité découle de la propriété $|zz'| = |z||z'|$.

B) Applications géométriques des modules

Propriété

Dans le plan complexe, soient A , B et M trois points ayant pour affixes respectives z_A , z_B et z . On rappelle que :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

On en déduit les caractérisations suivantes :

1. **Cercle** : pour $r > 0$, le point M appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si

$$|z - z_A| = r.$$

2. **Médiatrice** : si $A \neq B$, le point M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si

$$|z - z_A| = |z - z_B|.$$

3. **Triangle isocèle** : pour A , B et C distincts, le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si

$$|z_B - z_A| = |z_C - z_A|.$$

4. **Triangle rectangle** : pour A , B et C distincts, le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si

$$|z_C - z_B|^2 = |z_B - z_A|^2 + |z_C - z_A|^2.$$

Démonstration

Ces propriétés découlent de l'égalité $AB = |z_B - z_A|$ et des caractérisations géométriques usuelles :

- un point appartient à un cercle si sa distance au centre est égale au rayon ;
- un point appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement s'il est équidistant de ses extrémités ;
- un triangle est isocèle en A si et seulement si $AB = AC$;
- un triangle est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Exemples

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z - (2 - i)| = 3.$$

Il s'agit du cercle de centre $A(2; -1)$ et de rayon 3.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

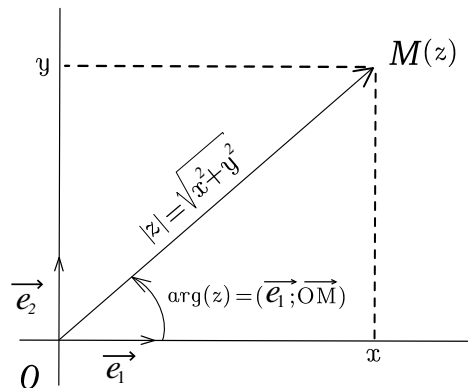
$$|z - 1| = |z - (3 + 2i)|.$$

Il s'agit de la médiatrice du segment $[AB]$, où $A(1; 0)$ et $B(3; 2)$.

Exercice

Dans le plan complexe, on considère les points d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + i$ et $z_C = 1 + 4i$. À l'aide des modules, démontrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A .

C) Argument d'un nombre complexe



Rappel

Rappel sur les coordonnées polaires :

On se place dans un plan $\mathcal{P}$ avec un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ distinct de l'origine O .

Les coordonnées polaires du point M sont les couples $(r; \theta)$ tels que $r = OM$ et θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \vec{OM})$. On se souvient que r est défini de façon unique mais que θ n'est défini qu'à un multiple entier de 2π près.

Le lien entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes $(x; y)$ de M est défini par les égalités : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Et réciproquement $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\cos \theta = \frac{x}{r}$, $\sin \theta = \frac{y}{r}$.

Ainsi l'affixe du point M est alors $r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul d'image M , $z = x + iy$ (x et y réels). On appelle argument de $z \neq 0$ toute mesure, en radians, de l'angle $(\vec{e}_1; \vec{OM})$. Si θ est un argument de z , on écrit $\arg(z) = \theta [2\pi]$.

Remarques

- Le nombre complexe $z = 0$ ne possède pas d'argument car, dans ce cas, l'angle $(\vec{e}_1 ; \vec{OM})$ ne se définit pas.
- Si z est un réel strictement positif, alors $\arg(z) = 0 [2\pi]$. Si z est un réel strictement négatif, alors $\arg(z) = \pi [2\pi]$.
- De la même manière, un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement positive a un argument égal à $\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et un imaginaire pur dont la partie imaginaire est strictement négative a un argument égal à $-\frac{\pi}{2}[2\pi]$. Par conséquent :

$$z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} [\pi] \quad (z \neq 0)$$

Théorème

Tout nombre complexe z non nul peut s'écrire sous la forme, dite trigonométrique, $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$ (réel) et $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel r est égal à $|z|$, et tout réel θ convenable est appelé argument du complexe z , noté $\arg(z)$.

Le complexe 0 n'a pas d'argument.

Remarques

1. Le nombre complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (puisque'il n'a pas d'argument).
2. Un nombre complexe possède une infinité d'arguments ! En effet, si θ est un argument de z , tout autre argument est de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). L'unique argument appartenant à l'intervalle $] -\pi ; \pi]$ s'appelle l'argument principal. On notera par exemple $\arg(z) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ ou $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π pour signifier que $\arg(z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
3. L'argument d'un nombre complexe n'étant pas unique, il en va de même de la forme trigonométrique, contrairement à la forme algébrique.
4. On remarquera enfin que deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument principal.

Exemples

Déterminer une forme trigonométrique des nombres complexes suivants : i , 1 , -1 , $-i$ et $1 + i$.

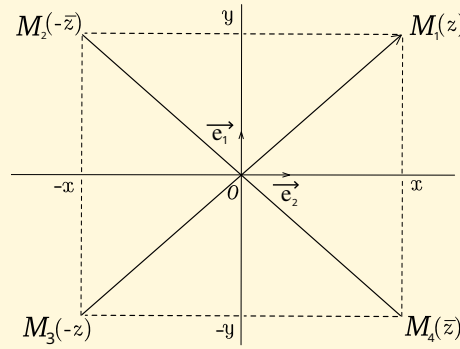
Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \right]$

Propriété

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

1. *Conjugué* : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$
2. *Opposé* : $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$
3. $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) [2\pi]$
4. *Produit* : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$
5. *Inverse* : $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]$
6. *Quotient* : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$
7. *Puissance* : $\forall n \in \mathbb{Z}, \arg(z^n) = n \times \arg(z) [2\pi]$

Les trois premières propriétés se déduisent immédiatement de la figure suivante :



4. Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, alors

$$zz' = rr'[(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')]$$

Vous qui connaissez parfaitement vos formules d'addition, vous en déduisez que

$$zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

Ainsi, nous arrivons au résultat capital : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$

5. et 6. Puisque $z \times \frac{1}{z} = 1$, on a $\arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) = 0 [2\pi]$. Ainsi

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi] \text{ et, par conséquent } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi].$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, une récurrence utilisant la propriété du produit donne

$$\arg(z^n) = n \arg(z) [2\pi].$$

Si $n < 0$, alors $-n \in \mathbb{N}^*$,

$$\arg(z^n) = \arg\left(\left(\frac{1}{z}\right)^{-n}\right) = -n \arg\left(\frac{1}{z}\right) = n \arg(z) [2\pi].$$

Si $n = 0$, on a $z^0 = 1$ et $\arg(1) = 0 [2\pi]$.

Démonstration

Remarques

Pour multiplier deux nombres complexes non nuls, on multiplie les modules et on additionne les arguments. Pour diviser deux nombres complexes non nuls, on divise les modules et on soustrait les arguments.

Exemples

- 1) Déterminer une forme trigonométrique de $z = -2\sqrt{3} + 2i$ puis de $z' = 3 - 4i$. En déduire une forme trigonométrique de zz' et de $\frac{z}{z'}$.
- 2) Soit $z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $z' = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$. Calculer zz' .

D) Applications géométriques des arguments

Théorème

angle

orienté

Dans un repère orthonormé direct, soient A, B, C, D quatre points tels que $A \neq B$ et $C \neq D$. Alors :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi].$$

Démonstration

L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$ et celle de $\overrightarrow{CD}$ est $z_D - z_C$. Par la relation de Chasles sur les angles orientés :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) &= (\vec{e}_1, \overrightarrow{CD}) - (\vec{e}_1, \overrightarrow{AB}) \\ &= \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]. \end{aligned}$$

Propriétés configurations géométriques

Pour des points A, B, C, D tels que les dénominateurs ci-dessous soient non nuls :

1. Si $A \neq B$ et $A \neq C$, les points A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

2. Si $A \neq B$ et $C \neq D$, les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

3. Sous les mêmes hypothèses, (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}.$$

4. Pour A, B, C distincts, le triangle ABC est rectangle isocèle en A si et seulement si

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i \quad \text{ou} \quad \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i.$$

Démonstration

Un quotient de complexes non nuls est réel si et seulement si son argument est nul modulo π : les vecteurs correspondants sont colinéaires. De même, il est imaginaire pur si et seulement si son argument vaut $\frac{\pi}{2}$ modulo π : les vecteurs sont orthogonaux. Enfin, le quotient vaut $\pm i$ si et seulement si les vecteurs sont orthogonaux et de même norme, ce qui caractérise un triangle rectangle isocèle en A .

Exemple

Soient $A(0; 0)$, $B(3; 0)$ et $C(0; 3)$. On a $z_A = 0$, $z_B = 3$ et $z_C = 3i$. Alors :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{3i}{3} = i.$$

Le triangle ABC est donc rectangle isocèle en A .

Exercice

Dans le plan complexe, on donne les points $A(1 + i)$, $B(4 + i)$ et $C(1 + 4i)$. Démontrer à l'aide d'un quotient d'affixes que ABC est rectangle isocèle en A .

E) Forme exponentielle

Nous allons voir maintenant une troisième façon, fort commode, de noter les nombres complexes. Soit z un nombre complexe de module r et d'argument θ , alors on a vu que :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

Il s'agit ici de la forme trigonométrique d'un nombre complexe, on choisit d'adopter la notation suivante :

Propriété

Formule d'Euler : Pour tout réel θ , on note :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ainsi, on obtient :

$$z = re^{i\theta}$$

Cette notation présente de nombreux avantages, en plus d'alléger la notation trigonométrique, si l'on considère deux nombres complexes z et z' de module r et r' et d'argument θ et θ' , alors nous avons vu que le module de zz' est rr' et l'argument de zz' est $\theta + \theta'$. Observons le calcul suivant :

$$zz' = re^{i\theta} r' e^{i\theta'} = rr' e^{i\theta+i\theta'} = rr' e^{i(\theta+\theta')}$$

On retrouve le module et l'argument du nombre complexe zz' en utilisant les règles de calcul sur les puissances.

Remarques

1. $e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ : $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta[2\pi]$
2. Tout nombre complexe non nul z d'argument θ et de module r s'écrit $z = re^{i\theta}$, cette écriture est appelée **forme exponentielle**. Comme la forme trigonométrique, elle n'est pas unique.

Exemples

$$e^{i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

donnant la fameuse identité d'Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2} = -i$$

Remarque

Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos \theta + i \sin(-\theta) = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Une simple transcription des propriétés vues sur les arguments donne alors :

Propriété

$\forall \theta$ et θ' de $\mathbb{R}$ on a :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}$$

Exercices

1. Soit $z = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5e^{i\frac{\pi}{12}}$, donner une forme exponentielle de zz' et de $\frac{z}{z'}$
2. On note $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. Déterminer les formes exponentielles de z_1 et z_2 . En déduire la forme exponentielle du nombre complexe $z = \frac{z_1^4}{z_2^3}$
3. Calculer $(1 + i)^{14}$

F) Formules de Moivre. Formules d'Euler

Théorème

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ on a :

Formules de Moivre :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration

Utilisons les formes exponentielles :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ce qui prouve la première formule de Moivre.

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))^n = (e^{-i\theta})^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

ce qui prouve la deuxième formule de Moivre.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta + i \sin \theta + \cos \theta - i \sin \theta = 2 \cos \theta$$

d'où la première formule d'Euler.

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta - \cos(-\theta) - i \sin(-\theta) = \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta + i \sin \theta = 2i \sin \theta$$

d'où la deuxième formule d'Euler.

IV) Cercle unité et racines n -ièmes

Définition cercle unité

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Les images des nombres de $\mathbb{U}$ sont exactement les points du cercle trigonométrique.

Propriété

Si $z, z' \in \mathbb{U}$, alors $zz' \in \mathbb{U}$ et $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$. En effet, $|zz'| = |z||z'| = 1$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} = 1$.

Exemple

Vérifions que $z = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ appartient à $\mathbb{U}$:

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1.$$

Ainsi, $z \in \mathbb{U}$.

A) Racines n -ièmes de l'unité

Définition

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, les **racines n -ièmes de l'unité** sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de ces solutions.

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $z^n = 1$ admet exactement n solutions distinctes :

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Si $n \geq 3$, leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Démonstration

Soit $z = re^{i\theta}$ une solution de $z^n = 1$. Alors $r^n = 1$, d'où $r = 1$, et $n\theta = 0 [2\pi]$. Ainsi $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ pour un entier k . Les valeurs $k = 0, \dots, n-1$ donnent n solutions distinctes ; les autres valeurs ne font que les répéter.

Exemples

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$.
- $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.

Propriété somme des racines

Pour $n \geq 2$, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 0.$$

En particulier, $1 + j + j^2 = 0$ pour les racines cubiques.

Démonstration

Posons $q = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Pour $n \geq 2$, on a $q \neq 1$ et $q^n = 1$. La somme géométrique donne :

$$1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 0.$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 = 1$ et représenter les six solutions sur le cercle trigonométrique.

B) Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Si $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$, l'équation $z^n = a$ possède exactement n solutions distinctes :

$$z_k = r^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Si $a = 0$, l'équation $z^n = 0$ possède une unique solution : $z = 0$.

Démonstration

Écrivons $z = \rho e^{i\varphi}$, avec $\rho > 0$. L'égalité $z^n = a$ équivaut à :

$$\rho^n = r \quad \text{et} \quad n\varphi = \theta + 2k\pi.$$

On obtient donc $\rho = r^{1/n}$ et $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. En faisant varier k de 0 à $n-1$, on obtient toutes les solutions distinctes.

Exemple

Résolvons $z^3 = 8i$. Comme $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$, les solutions sont :

$$z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Sous forme algébrique, on obtient :

$$z_0 = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = -2i.$$

Exercices

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 16$ et représenter les solutions dans le plan complexe.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8$; donner les solutions sous forme exponentielle puis algébrique.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = \sqrt{3} - i$.