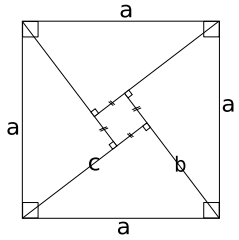
Notes de démonstrations du théorème de Pythagore

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Pythagore. En voici quelques-unes abordables en classe de S4. Voici quelques notes rapides permettant de comprendre ces démonstrations.

1) Démonstration attribuée à Bhaskara



Bhaskara, mathématicien indien du XII^{e} siècle.
L'aire du grand carré est égale à la somme des aires des quatre triangles rectangles et de l'aire du petit carré.

$$a^2 = 4 \times \frac{1}{2}bc + (b-c)^2$$

D'où :

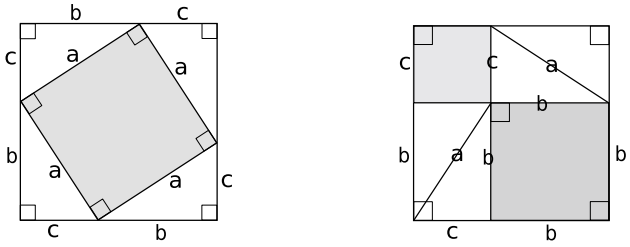
$$a^2 = 2bc + b^2 - 2bc + c^2$$

Ainsi :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

2) Démonstration chinoise par découpage

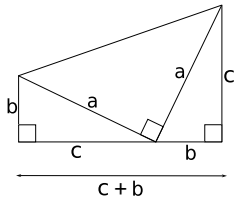
Cette démonstration par découpage est traditionnellement associée aux mathématiques chinoises anciennes. On trouve une méthode apparentée dans le *Zhoubi Suanjing*, un ancien traité chinois. Son inventeur exact est inconnu.



On part de deux grands carrés de même côté $b + c$, donc de même aire.
Dans chacun de ces carrés, on retire quatre triangles rectangles identiques, de côtés b et c.
Les aires restantes sont donc égales. À gauche, il reste un carré de côté a. À droite, il reste deux carrés de côtés b et c.
On obtient donc :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3) Trapèze



James Abraham Garfield (1831-1881), président des États-Unis en 1881, assassiné quelques mois après son entrée en fonction.

Rappel : Aire d'un trapèze = $\dfrac{(\text{grande base} + \text{petite base}) \times \text{hauteur}}{2}$

L'aire du trapèze est égale à la somme des aires des trois triangles rectangles qui le composent.
Le triangle central est rectangle, car ses deux angles adjacents au côté de longueur a sont complémentaires.
On a donc :

$$\frac{1}{2}(b+c)(c+b) = 2 \times \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2$$

D'où :

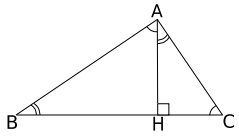
$$(b+c)^2 = 2bc + a^2$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

Ainsi :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

4) Triangles semblables



Le triangle ABC est rectangle en A et H est le pied de la hauteur issue de A.
Les triangles ABC, AHB et AHC sont semblables, car leurs angles sont deux à deux égaux.
Les triangles ABC et HBA étant semblables, on a :

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BH}$$

D'où :

$$AB^2 = BH \times BC$$

De même, les triangles ABC et HAC étant semblables, on obtient :

$$AC^2 = HC \times BC$$

En additionnant ces deux égalités :

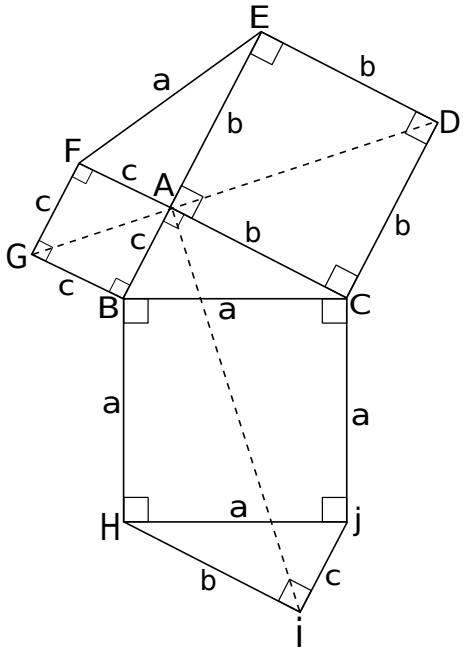
$$AB^2 + AC^2 = BH \times BC + HC \times BC$$

$$AB^2 + AC^2 = (BH + HC) \times BC$$

Or $BH + HC = BC$, donc :

$$\boxed{AB^2 + AC^2 = BC^2}$$

5) Symétrie et rotation



Léonard de Vinci (1452-1519).
On considère les trois carrés construits sur les côtés du triangle rectangle ABC.
Par symétrie axiale d'axe (GD), les quadrilatères $GDEF$ et $GBCD$ ont la même aire :

$$\text{aire}(GDEF) = \text{aire}(GBCD)$$

Par symétrie centrale de centre le milieu de $[BJ]$, les quadrilatères $ABHI$ et $AIJC$ ont la même aire :

$$\text{aire}(ABHI) = \text{aire}(AIJC)$$

Par une rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$, les quadrilatères $GBCD$ et $IJCA$ ont la même aire :

$$\text{aire}(GBCD) = \text{aire}(IJCA)$$

On en déduit :

$$\text{aire}(ABHIJC) = \text{aire}(GBCDEF)$$

Ces deux figures sont respectivement constituées des deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit et du carré construit sur l'hypoténuse.
Ainsi :

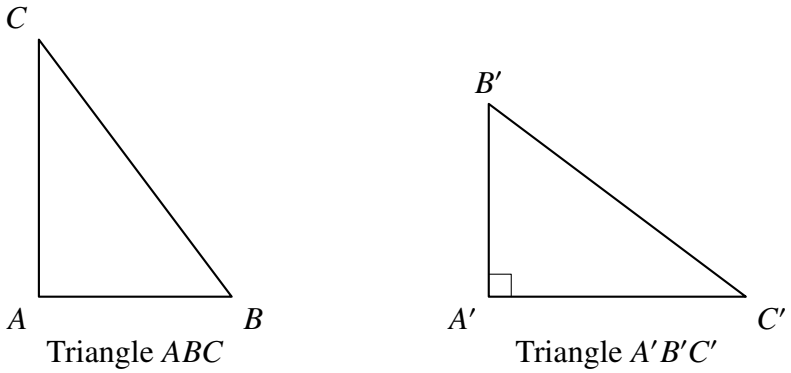
$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

6) Réciproque du théorème de Pythagore

Nous avons vu plusieurs démonstrations du théorème de Pythagore, mais nous n'avons pas encore démontré sa réciproque. Faisons-le ici.

Énoncé : Soit ABC un triangle tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Alors le triangle ABC est rectangle en A.

Démonstration :



Construisons un triangle $A'B'C'$ **rectangle** en A', tel que $A'B' = AB$ et $A'C' = AC$.
D'après le théorème de Pythagore, appliqué au triangle $A'B'C'$:

$$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$$

Or $A'B' = AB$ et $A'C' = AC$, donc :

$$B'C'^2 = AB^2 + AC^2$$

Par hypothèse, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
Ainsi :

$$B'C'^2 = BC^2$$

Les longueurs étant positives, on en déduit :

$$B'C' = BC$$

Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont donc leurs trois côtés respectivement de même longueur.
Ils sont donc superposables.
Or le triangle $A'B'C'$ est rectangle en A'. Le triangle ABC est donc lui aussi rectangle en A.

$$\boxed{\widehat{BAC} = 90^\circ}$$