Transformations

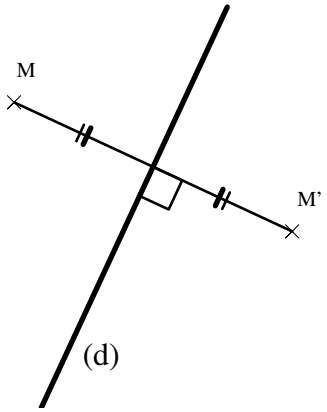
I) Symétrie axiale

A) Définition

Définition

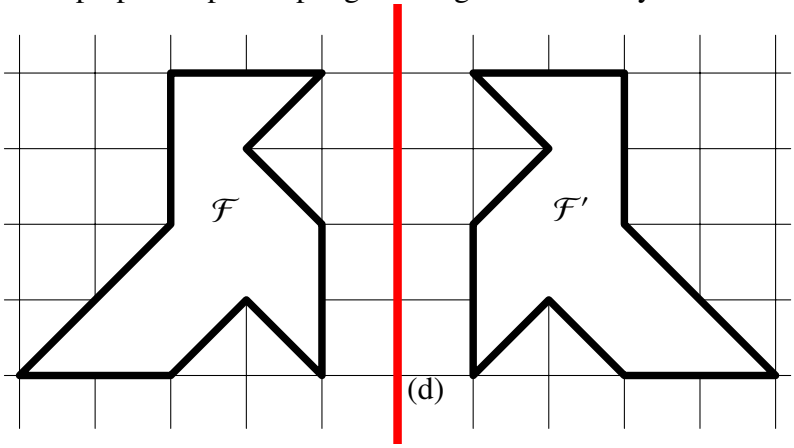
Deux points M et M' sont symétriques par rapport à la droite (d) signifie que :
-[MM'] est perpendiculaire à (d)
-M et M' sont à égale distance de (d).

Dans ce cas, (d) est la médiatrice de [MM'].



Deux figures symétriques par symétrie axiale se superposent par un pliage le long de l'axe de symétrie.

La figure $\mathcal{F}'$ est le symétrique de la figure $\mathcal{F}$ par rapport à la droite (d). On dit aussi que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont symétriques par rapport à (d).



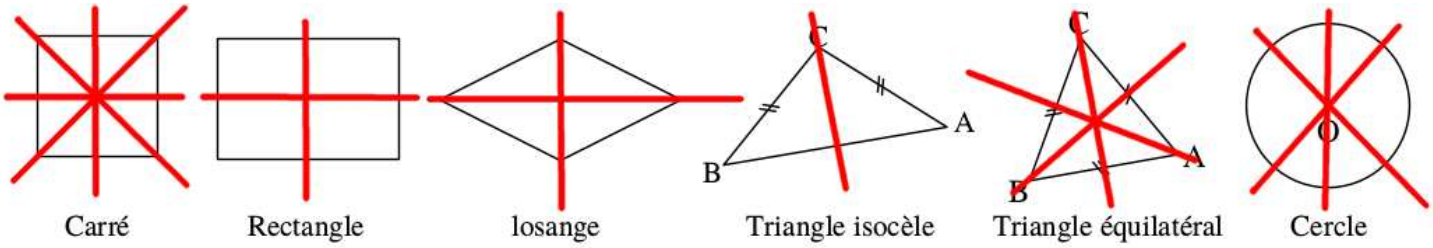
B) Axe de symétrie d'une figure

Définition

Une droite est un **axe de symétrie** pour une figure donnée lorsque le symétrique de cette figure par rapport à cette droite est la figure elle-même.

Exemple

Sur les exemples ci-dessous, des axes de symétrie sont tracés en rouge.



Carré | Rectangle | losange | Triangle isocèle | Triangle équilatéral | Cercle

C) Propriétés

Propriété

Dans une symétrie axiale :

- le symétrique d'une droite est une droite,
- le symétrique d'un segment est un segment de même longueur,
- le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon,
- le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.

Remarque

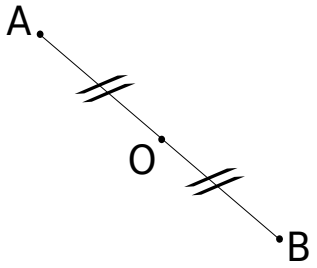
On dit aussi que la symétrie axiale conserve les longueurs et les mesures d'angles.

II) Symétrie centrale

A) Définition

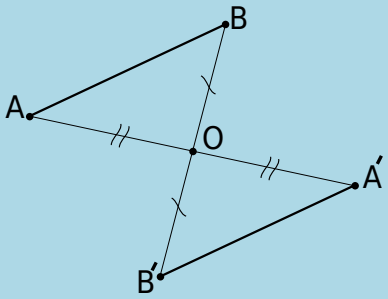
Définition

-Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O lorsque le point O est le milieu du segment [AB].
-Transformer une figure par symétrie centrale revient à lui faire faire un demi-tour autour d'un point.



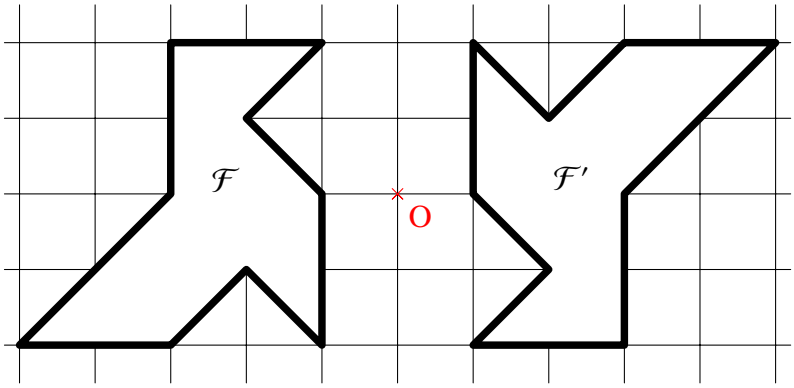
Remarque

-Deux figures symétriques par symétrie centrale se superposent par un demi-tour autour du centre de symétrie.
-Pour tracer le symétrique d'un segment, il suffit de tracer les symétriques de ses extrémités. Pour tracer le symétrique d'un cercle, il suffit de tracer le symétrique de son centre.



La figure $\mathcal{F}'$ est le symétrique de la figure $\mathcal{F}$ par rapport au point O.

On dit aussi que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont symétriques par rapport à O.



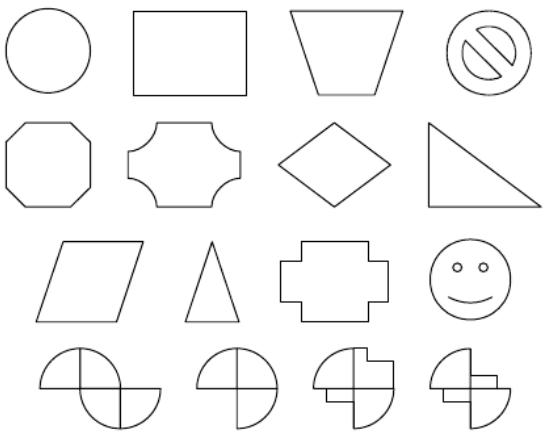
B) Centre de symétrie

Définition

Une figure admet un centre de symétrie lorsqu'elle est invariante par la symétrie de centre ce point.

Exercice

Sur les figures suivantes, trouver celles qui ont un centre de symétrie.



C) Propriétés

Propriété

Dans une symétrie centrale :
- le symétrique d'une droite est une droite qui lui est parallèle,
- le symétrique d'un segment est un segment de même longueur,
- le symétrique d'un cercle est un cercle de même rayon,
- le symétrique d'un angle est un angle de même mesure.

Remarque

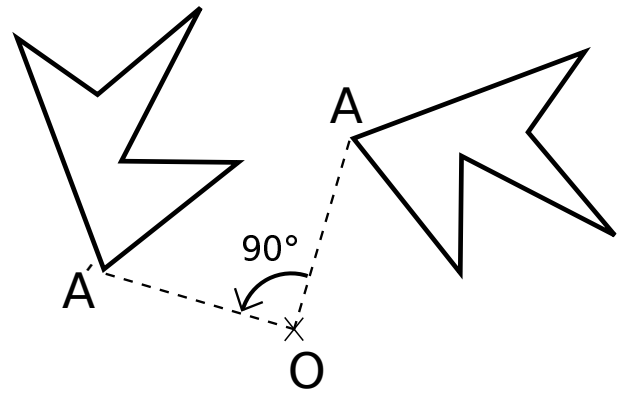
On dit aussi que la symétrie centrale conserve les longueurs et les mesures d'angles.

III) La rotation

Définition

-Transformer une figure par **rotation** revient à la faire pivoter d'un angle donné autour d'un point, son centre. Le sens inverse des aiguilles d'une montre est appelé **sens direct**.
-Dans le sens direct, le point A' est l'image du point A par la rotation de centre O et d'angle α : lorsque OA=OA', l'angle $\widehat{AOA'}$ mesure $\alpha°$ et on tourne de A vers A' dans le sens direct.

Sur l'exemple suivant, l'angle choisi est 90°.



Propriété

La rotation conserve l'alignement, les longueurs, le parallélisme et les angles.
Un cercle est donc invariant par rotation autour de son centre.

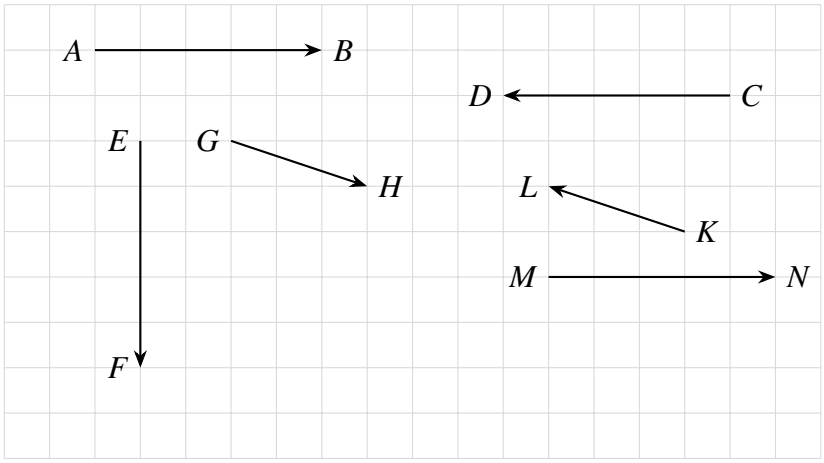
IV) La translation

A) Les vecteurs

Définition

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un segment de droite caractérisé par :
- sa **direction** : celle de la droite (AB) ;
- son **sens** : celui de A vers B ;
- sa **longueur** (ou **norme**) : la longueur AB.

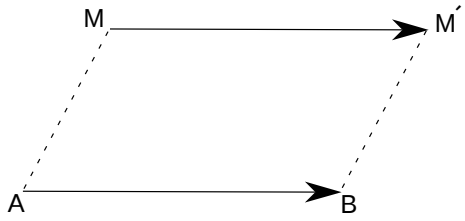
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{MN}$ ont la même direction.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont de même sens.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires.
$\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont de sens contraires.
$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{KL}$ ont la même direction.
$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont de sens contraires.
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont de même norme.
$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont de même norme.



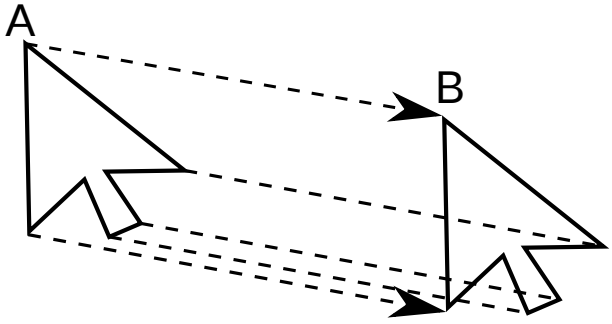
Propriété Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

B) Définition de la translation

Définition Soient A, B et M trois points. La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme M en M', de telle sorte que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MM'}$. On dit aussi que M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Définition La translation d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'une figure, fait glisser cette figure :
- parallèlement à (AB) (en suivant la direction de $\overrightarrow{AB}$).
- dans le même sens que $\overrightarrow{AB}$.
- à une distance AB (norme de $\overrightarrow{AB}$).



C) Propriétés

Propriétés

-La translation conserve l'alignement, les longueurs, le parallélisme et les angles.
-Une droite est invariante par toute translation dont la direction est parallèle à cette droite.

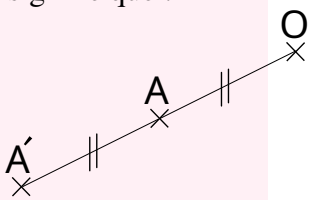
V) Homothétie

A) Homothétie de rapport positif

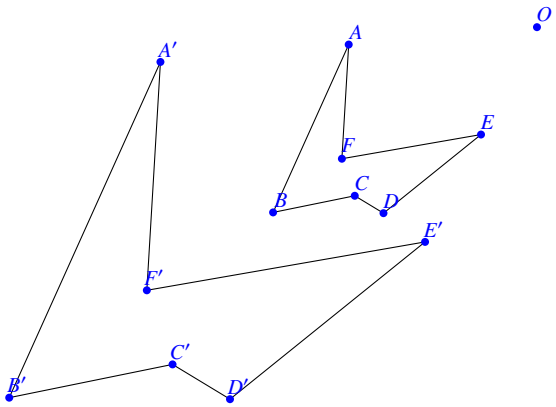
Définition

A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2 signifie que :

- O, A et A' sont alignés
- A et A' sont du même côté par rapport à O.
- OA'=2× OA



Sur l'exemple suivant, le polygone A'B'C'D'E'F' est l'image du polygone ABCDEF par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

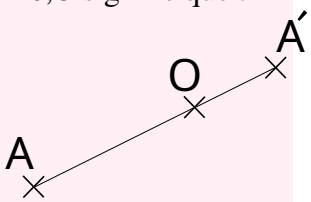


B) Homothétie de rapport négatif

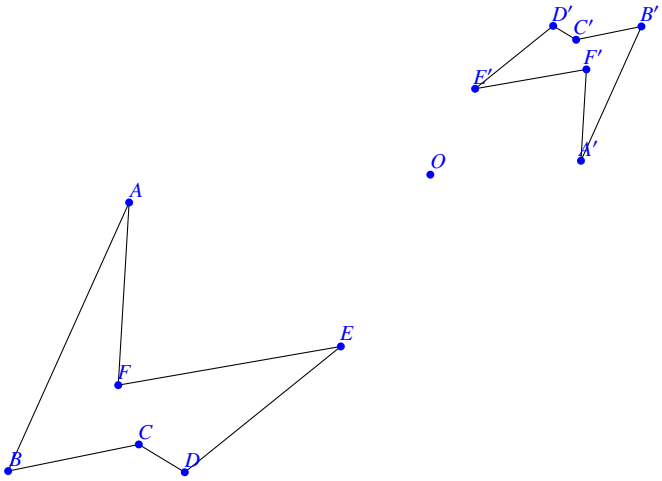
Définition

A' est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $-0,5$ signifie que :

- O, A et A' sont alignés
- A et A' ne sont pas du même côté par rapport à O.
- OA'=0,5 × OA



Sur l'exemple suivant, le polygone A'B'C'D'E'F' est l'image du polygone ABCDEF par l'homothétie de centre O et de rapport $-0,5$.



Propriété

Deux figures homothétiques sont une réduction ou un agrandissement l'une de l'autre.

Propriété

Si une figure $\mathcal{F}'$ est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ par une homothétie de rapport k alors :

- Pour obtenir les **longueurs** de la figure $\mathcal{F}'$, il suffit de multiplier les longueurs de la figure $\mathcal{F}$ par k.
- Pour obtenir **l'aire** de la figure $\mathcal{F}'$, il suffit de multiplier l'aire de la figure $\mathcal{F}$ par k^2.

En résumé :

-Si $k > 1$ ou $k < -1$, la figure image est un **agrandissement** de la figure initiale.

-Si $-1 < k < 0$ ou $0 < k < 1$, la figure image est une **réduction** de la figure initiale.

-Si $k > 0$, les deux figures sont « du même côté »

-Si $k < 0$, les deux figures ne sont pas « du même côté »