Agrandissements - Réductions

I) Définition - Vocabulaire

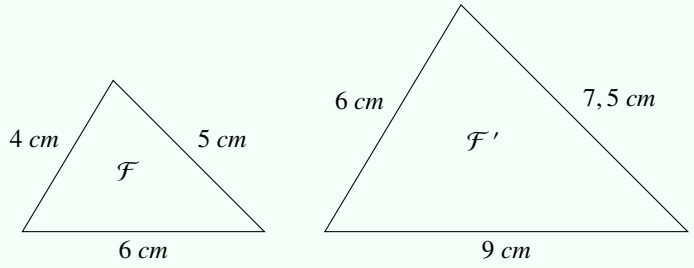
Définition

L'image d'une figure (ou d'un solide) par un **agrandissement** ou une **réduction** est une figure (ou un solide) dont toutes les longueurs ont été multipliées par un même nombre k strictement positif ($k \neq 1$), le **rapport** de l'agrandissement ou de la réduction.

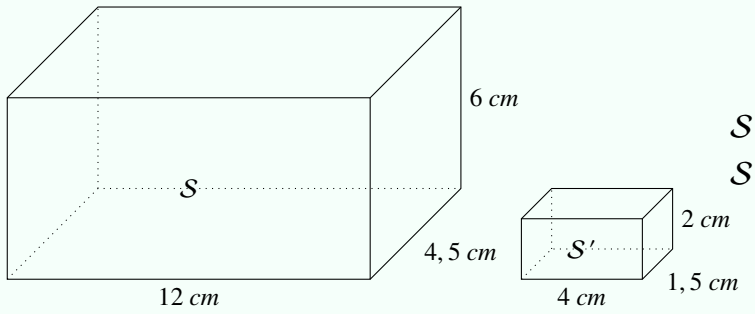
Propriété

— Si $0 < k < 1$, la **transformation** est une réduction.
— Si $k > 1$, la transformation est un agrandissement.

Exemples



$\mathcal{F}'$ est un agrandissement de $\mathcal{F}$ de rapport $1,5$.



$\mathcal{S}'$ est une réduction de $\mathcal{S}$ de rapport $\frac{1}{3}$.

Remarques

— Pour les cartes, on parle plutôt d'**échelle** que de rapport. Ce sont généralement des réductions.
— Pour des solides, on parle parfois de modèle réduit.

II) Figures semblables

Définition

Dans un agrandissement ou une réduction, les figures ou solides sont dits **semblables**.

Exercice

Un cône C_1 a un rayon de 8 *cm* et une hauteur de 30 *cm*. Un cône C_2 a un rayon de 20 *cm* et une hauteur de 75 *cm*.

Les deux cônes sont-ils semblables ? Si oui, préciser le rapport d'agrandissement permettant de passer de C_1 à C_2.

Remarques

— Tous les cercles sont semblables.
— Tous les triangles équilatéraux sont semblables.
— Tous les carrés sont semblables.
— Toutes les sphères sont semblables.
— Tous les cubes sont semblables.

III) Effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes et les angles

Propriété

Lorsqu'on effectue un agrandissement ou une réduction de rapport k ($k > 0$) :

— Les mesures des **angles sont conservées**.
— Les **longueurs** sont multipliées par k.
— Les **aires** sont multipliées par k^2.
— Les **volumes** sont multipliés par k^3.

Exercice

Soit $\mathcal{P}$ un pavé droit de dimensions 13 *cm*, 9 *cm* et 6 *cm*. Soit $\mathcal{P}'$ l'agrandissement de $\mathcal{P}$ de rapport 3.

a) Calculer l'aire de la surface totale de $\mathcal{P}$. Calculer le volume de $\mathcal{P}$.
b) En déduire, sans calculer ses dimensions, l'aire de la surface totale et le volume de $\mathcal{P}'$.

IV) Homothéties

Définition

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Soient O et A deux points distincts du plan ou de l'espace. L'image du point A par l'**homothétie** de centre O et de rapport k est :

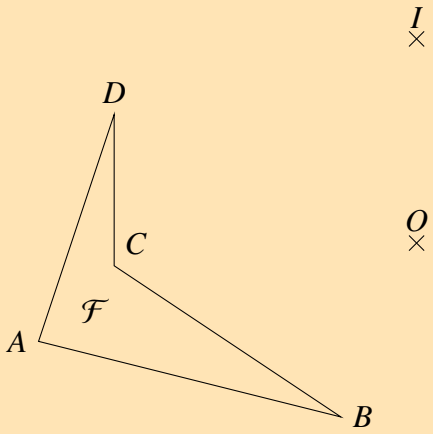
— si $k > 0$, le point A' tel que $OA' = k \times OA$ **et** $A' \in [OA)$;
— si $k < 0$, le point A' tel que $OA' = -k \times OA$ **et** $O \in [AA']$.

Remarque

Dans les deux cas, on a $OA' = |k| \times OA$.

Exercice

Tracer les images $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ de $\mathcal{F}$ par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{2}$ et par l'homothétie de centre O et de rapport $-2,5$.



Propriété

Si une figure $\mathcal{F}'$ (ou un solide $\mathcal{S}'$) est l'image d'une figure $\mathcal{F}$ (ou d'un solide $\mathcal{S}$) par une homothétie de rapport k, alors, si $|k| \neq 1$, $\mathcal{F}'$ (ou $\mathcal{S}'$) est un agrandissement ou une réduction de $\mathcal{F}$ (ou de $\mathcal{S}$) de rapport $|k|$.
Si $|k| = 1$, les dimensions sont conservées.

V) Triangles isométriques

Définition

Deux triangles sont dits **isométriques** (ou **égaux**) si leurs côtés homologues ont les mêmes longueurs.
Deux triangles isométriques sont superposables. Leurs angles homologues ont donc les mêmes mesures.

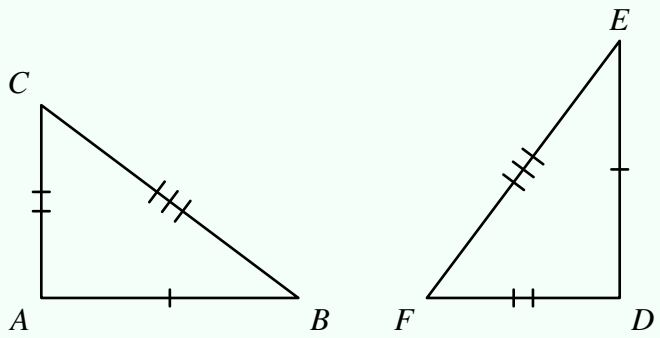
Propriété

Deux triangles sont isométriques si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- Leurs trois côtés homologues ont les mêmes longueurs.
- Ils ont deux côtés homologues de mêmes longueurs et l'angle compris entre ces côtés de même mesure.
- Ils ont un côté homologue de même longueur et les deux angles adjacents à ce côté de mêmes mesures.

Exemple

Les triangles ABC et DEF ci-dessous sont isométriques.



On a :

$$AB = DE, \qquad AC = DF, \qquad BC = EF.$$

Les trois côtés homologues ont les mêmes longueurs : les triangles ABC et DEF sont donc isométriques.

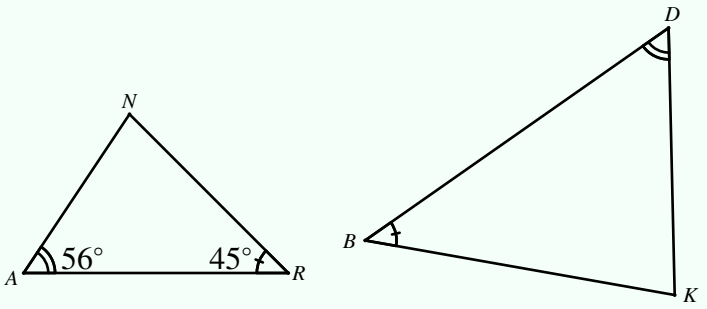
VI) Triangles semblables

A) Définitions et propriétés

Définition

Deux **triangles** sont dits **semblables** si les angles de l'un ont les mêmes mesures que les angles correspondants de l'autre.

Exemple



Les triangles ARN et DBK ci-dessus sont semblables. En effet, on a :

$$\widehat{ARN} = \widehat{DBK} = 45° \qquad \widehat{NAR} = \widehat{KDB} = 56°$$

La somme des angles d'un triangle étant égale à 180°, on a aussi $\widehat{ANR} = \widehat{DKB} = 180° - (56° + 45°) = 79°$.

Dans ces triangles semblables, les sommets A et D sont des **sommets homologues**. De même, les sommets R et B sont homologues ainsi que les sommets N et K. $[AR]$ et $[DB]$ sont des **côtés homologues**, de même que $[RN]$ et $[KB]$ ou encore $[NA]$ et $[DK]$.

Propriété

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

Exemple

Si l'on considère à nouveau les triangles semblables ARN et DBK de l'exemple précédent, on a :

$$\frac{AR}{DB} = \frac{AN}{DK} = \frac{RN}{BK}$$

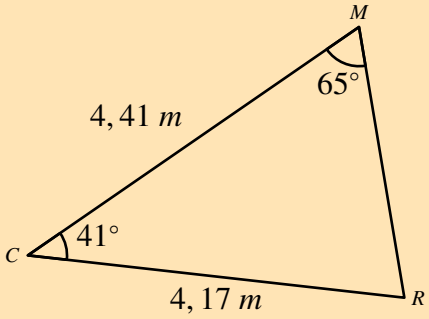
Méthode

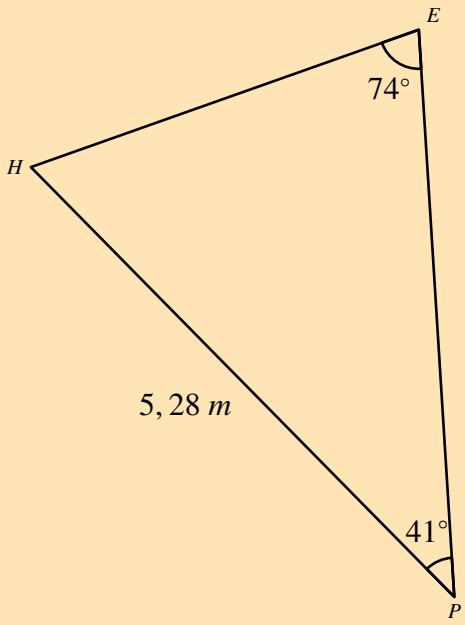
Pour écrire correctement cette égalité, on place aux numérateurs les longueurs des côtés du triangle ARN et aux dénominateurs les longueurs des côtés homologues du triangle DBK.

Remarque

On peut aussi inverser **les trois** fractions pour obtenir correctement une égalité.

Exercice





1. Montrer que les triangles CRM et HEP sont semblables et citer leurs paires de côtés homologues.
2. En déduire une triple égalité de rapports de longueurs.
3. Quelle longueur peut-on alors calculer ? La calculer.

B) Théorème de Thalès

Théorème de Thalès

Soient A, B, C, M et N cinq points tels que A, B, M soient alignés, A, C, N soient alignés, avec $A \neq B$ et $A \neq C$. Si :

- (BM) et (CN) sont sécantes en A,
- (MN) et (BC) sont parallèles entre elles,

Alors, on a :

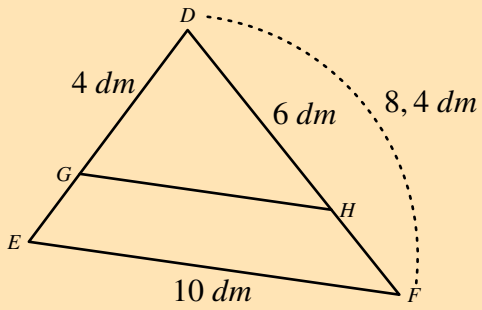
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Exercice

Sur la figure ci-contre, $(GH) \parallel (EF)$.

Calculer DE et GH.

Arrondir au mm près si nécessaire.



Exercice

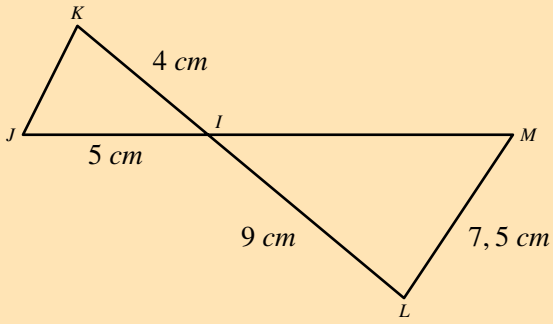
Sur la figure ci-contre (pas à l'échelle) :

— (JM) et (KL) sont sécantes en I.

— (JK) et (LM) sont parallèles entre elles.

Calculer IM et JK.

Arrondir au mm près si nécessaire.



C) Droites parallèles ?

Réciproque du théorème de Thalès

Si :

— Les points A, B et M sont alignés,

— Les points A, C et N sont alignés dans le même ordre que A, B et M,

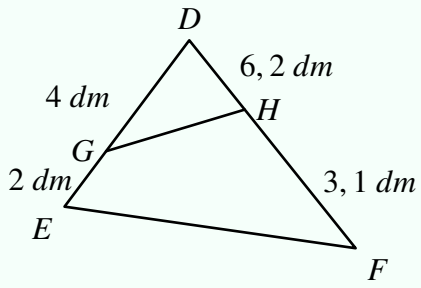
— $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$,

Alors : (MN) et (BC) sont parallèles entre elles.

Exemple

Sur la figure ci-contre, les points D, G, E sont alignés et les points D, H, F sont alignés dans le même ordre.

Montrons que les droites (GH) et (EF) sont parallèles.



On a :

$$\frac{DG}{DE} = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

et

$$\frac{DH}{DF} = \frac{6,2}{6,2+3,1} = \frac{6,2}{9,3} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi :

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF}.$$

De plus, les points D, G, E et les points D, H, F sont alignés dans le même ordre. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (GH) et (EF) sont parallèles.

Exercice

Sur la figure ci-contre, les points qui semblent alignés le sont.

Les droites (GH) et (EF) sont-elles parallèles ?

Justifier.

