

2025–2026
EXAMENS DU SEMESTRE II
NOTES DE CORRECTION – S6 MATHS 5 FR PART A

DATE : 8 juin 2026

DURÉE : 2 périodes

A1	On résout dans $\mathbb{C}$: $4z^2 - 2z + 1 = 0.$ Le discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12.$ Donc $z = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{8} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{8} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}.$ $S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{4}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{4} \right\}$	5
A2	a) On a $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$ Alors $\bar{z} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$ Calculons z^2 : $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$ Ainsi, $\bar{z} = z^2.$ b) On résout $(1 - 2i)(z + 4) = z.$ En développant : $(1 - 2i)z + 4 - 8i = z.$ Donc $-2iz = -4 + 8i.$ Ainsi $z = \frac{-4 + 8i}{-2i} = -4 - 2i.$ Comme $z = a + bi$, on obtient $b = -2.$	6
A3	Dans le développement de $(1 + px)^6$, le terme en x^3 est $\binom{6}{3}(px)^3 = 20p^3x^3.$ On peut trouver ce coefficient 20 avec le triangle de Pascal.	5

	Son coefficient est donc $20p^3$. On sait que ce coefficient vaut 40 d'après l'énoncé, donc $20p^3 = 40 \quad \Longleftrightarrow \quad p^3 = 2.$ Donc $\boxed{p = \sqrt[3]{2}.$	
A4	La suite est définie par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}, \quad n \geq 1.$ a) On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$: $u_{n+1} = \frac{3(n+1)+1}{(n+1)+2} = \frac{3n+4}{n+3}.$ Donc $u_{n+1} - u_n = \frac{3n+4}{n+3} - \frac{3n+1}{n+2} = \frac{(3n+4)(n+2) - (3n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)}.$ Or $(3n+4)(n+2) - (3n+1)(n+3) = 5.$ Ainsi $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+2)} > 0.$ Donc la suite est strictement croissante. $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$ Autre méthode : Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$ sur $I = [1; +\infty[$. f est dérivable sur I, et on a : $\forall x \in I, f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x+1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$ La fonction f est donc strictement croissante sur I, la suite (u_n) est donc strictement croissante pour $n \geq 1$. b) On calcule la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n+1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3.$ Donc $\boxed{L = 3.}$	4
A5	Correction. On a $u_{n+1} = u_n^2 - 1, \quad u_1 = k.$ a) On obtient $u_2 = k^2 - 1.$ Puis $u_3 = u_2^2 - 1 = (k^2 - 1)^2 - 1 = k^4 - 2k^2.$	6

Donc

$$u_2 = k^2 - 1 \quad \text{et} \quad u_3 = k^4 - 2k^2.$$

b) On sait que

$$u_2 + u_3 = 11.$$

Donc

$$k^2 - 1 + k^4 - 2k^2 = 11,$$

c'est-à-dire

$$k^4 - k^2 - 12 = 0.$$

On pose $X = k^2$. Alors

$$X^2 - X - 12 = 0 = (X - 4)(X + 3).$$

Donc

$$X = 4 \quad \text{ou} \quad X = -3.$$

Comme $X = k^2 \geq 0$, on garde seulement $X = 4$. Ainsi

$$k^2 = 4,$$

donc

$$k = -2 \quad \text{ou} \quad k = 2.$$

A6

La loi de probabilité de X est

5

x	0	1	2	3	4
$P(X = x)$	k	$2k$	$3k$	$2k$	k

a) La somme des probabilités vaut 1 :

$$k + 2k + 3k + 2k + k = 9k = 1.$$

Donc

$$k = \frac{1}{9}.$$

b) La probabilité d'avoir au moins trois réussites est

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 2k + k = 3k = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Donc

$$P(X \geq 3) = \frac{1}{3}.$$

c) L'espérance vaut

$$E(X) = 0 \cdot k + 1 \cdot 2k + 2 \cdot 3k + 3 \cdot 2k + 4 \cdot k.$$

Donc

$$E(X) = 18k = 18 \cdot \frac{1}{9} = 2.$$

$$E(X) = 2.$$

d) Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre d'étudiants, un étudiant réussit **2 lancers sur 4**.

e) La loi est symétrique autour de 2 : les probabilités pour 0 et 4 sont égales, celles pour 1 et 3 sont égales, et le centre est 2. L'espérance pouvait donc être trouvée directement.

A7	a) L'affirmation est : « f atteint un maximum local en $x = 0$ ». D'après le tableau, $f'(x)$ est positif avant 0 et positif après 0. Il n'y a donc pas de changement de signe de f' en 0. Ainsi, f n'admet pas d'extremum local en 0. Affirmation fausse. b) L'affirmation est : « En $x = -1$, la courbe de f possède un point d'inflexion ». D'après le tableau, f'' change de signe en $x = -1$: il passe de positif à négatif, et $f''(-1) = 0$. La concavité change donc en $x = -1$. Affirmation vraie.	4
A8	On résout $\log_2 x + \log_2(x - 3) = \log_2 10.$ Conditions d'existence : $x > 0 \quad \text{et} \quad x - 3 > 0,$ donc $x > 3.$ En utilisant la propriété des logarithmes : $\log_2(x(x - 3)) = \log_2 10.$ Donc $x(x - 3) = 10.$ Ainsi $x^2 - 3x - 10 = 0,$ soit $(x - 5)(x + 2) = 0.$ Les solutions candidates sont $x = 5$ et $x = -2$. Seule la solution $x = 5$ vérifie $x > 3$. $x = 5.$	6
A9	La fonction est $g(x) = \frac{1}{\sin x} + \cos(2x).$ a) On dérive terme à terme. En posant $k(x) = \frac{1}{\sin x}$ et $u(x) = \cos(2x)$, on a $k'(x) = \frac{0 \times \sin x - 1 \times \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$ et $u'(x) = -2 \sin(2x)$ Donc $g'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} - 2 \sin(2x).$ b) On cherche la tangente au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{4}$. On calcule d'abord l'ordonnée : $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 0 = \sqrt{2}.$	10

On calcule ensuite la pente :

$$g' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{-\cos \left(\frac{\pi}{4} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} \right)} - 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} - 2 = -\sqrt{2} - 2.$$

L'équation de la tangente est donc

$$y - g \left(\frac{\pi}{4} \right) = g' \left(\frac{\pi}{4} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

Ainsi

$$y = \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 2) \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

- c) On sait que $x = \frac{\pi}{2}$ est un point critique (maximum ou minimum, comme écrit dans l'énoncé).

Pour classer l'extremum, on utilise le signe de $g'' \left(\frac{\pi}{2} \right)$. Graphiquement, on voit que $g'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 5 > 0$

La courbe est donc convexe au voisinage de $\frac{\pi}{2}$.

$$\text{L'extremum en } x = \frac{\pi}{2} \text{ est un minimum.}$$

On peut aussi le faire par le calcul : À partir de

$$g'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2 \sin(2x),$$

on obtient

$$g''(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{2 \cos^2 x}{\sin^3 x} - 4 \cos(2x).$$

Donc

$$g'' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 1 + 0 - 4 \cos(\pi) = 1 + 4 = 5 > 0.$$

2025–2026
EXAMENS DU SEMESTRE II
NOTES DE CORRECTION – S6 MATHS 5 FR PART B

DATE : 8 juin 2026

DURÉE : 2 périodes

B1	Soit	20												
		$f(x) = \frac{x^2 + 7x}{4 - 2x}.$												
	a) Le dénominateur ne doit pas être nul :													
		$4 - 2x \neq 0 \iff x \neq 2.$												
	Donc													
		$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$												
	Les zéros vérifient													
		$x^2 + 7x = 0 \iff x(x + 7) = 0.$												
	Donc													
		$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -7.$												
	b) Comme $4 - 2x = 0$ pour $x = 2$ et que le numérateur vaut alors $2^2 + 7 \cdot 2 = 18 \neq 0$, il y a une asymptote verticale d'équation													
		$x = 2.$												
	De plus,													
		$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty.$												
	c) Le degré du numérateur est 2 et celui du dénominateur est 1. Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.													
		Aucune asymptote horizontale.												
	d) On utilise la formule du quotient :													
		$f'(x) = \frac{(2x + 7)(4 - 2x) - (x^2 + 7x)(-2)}{(4 - 2x)^2}.$												
	En simplifiant :													
		$f'(x) = \frac{-2x^2 + 8x + 28}{(4 - 2x)^2}.$												
	On peut aussi écrire													
		$f'(x) = \frac{18 - (x - 2)^2}{2(x - 2)^2}.$												
	e) Le dénominateur de $f'(x)$ est strictement positif sur le domaine. Le signe de f' dépend donc de													
		$18 - (x - 2)^2.$												
	On résout													
		$18 - (x - 2)^2 = 0 \iff (x - 2)^2 = 18 \iff x = 2 \pm 3\sqrt{2}.$												
	Le signe de f' est donc :													
		<table style="margin: auto;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">x</td> <td style="padding: 0 10px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 0 10px;">$2 - 3\sqrt{2}$</td> <td style="padding: 0 10px;">2</td> <td style="padding: 0 10px;">$2 + 3\sqrt{2}$</td> <td style="padding: 0 10px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 10px;">$f'(x)$</td> <td style="padding: 0 10px;">$-$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$++$</td> <td style="padding: 0 10px;">0</td> <td style="padding: 0 10px;">$-$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$2 - 3\sqrt{2}$	2	$2 + 3\sqrt{2}$	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	0	$++$	0	$-$
x	$-\infty$	$2 - 3\sqrt{2}$	2	$2 + 3\sqrt{2}$	$+\infty$									
$f'(x)$	$-$	0	$++$	0	$-$									

On obtient alors le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	$2 - 3\sqrt{2}$	2	$2 + 3\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$-\frac{11}{2} - 3\sqrt{2}$		$-\infty$
		$-\frac{11}{2} + 3\sqrt{2}$		$-\infty$		$-\infty$

Ainsi, f admet :

un minimum local en $x = 2 - 3\sqrt{2}$

avec

$$f(2 - 3\sqrt{2}) = -\frac{11}{2} + 3\sqrt{2},$$

et

un maximum local en $x = 2 + 3\sqrt{2}$

avec

$$f(2 + 3\sqrt{2}) = -\frac{11}{2} - 3\sqrt{2}.$$

Sur l'intervalle $[-6, 1]$, le seul point critique est $2 - 3\sqrt{2}$. On compare :

$$f(-6) = -\frac{3}{8}, \quad f(1) = 4,$$

et

$$f(2 - 3\sqrt{2}) = -\frac{11}{2} + 3\sqrt{2}.$$

Donc l'ensemble image de f sur $[-6, 1]$ est

$$\left[-\frac{11}{2} + 3\sqrt{2}, 4 \right].$$

Soit maintenant

$$g(x) = 2x - 2\ln(x^2 + 1).$$

f) On calcule la dérivée :

$$g'(x) = 2 - 2 \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} = 2 - \frac{4x}{x^2 + 1}.$$

Donc

$$g'(-1) = 2 - \frac{4(-1)}{(-1)^2 + 1} = 2 + 2 = 4.$$

Le taux de variation instantané en $x_0 = -1$ vaut donc

$$\boxed{g'(-1) = 4}$$

g) Le taux de variation moyen sur $[-1, 4]$ vaut

$$\frac{g(4) - g(-1)}{4 - (-1)}.$$

Or

$$g(4) = 8 - 2\ln(17),$$

	et $g(-1) = -2 - 2 \ln(2).$ Donc $\frac{g(4) - g(-1)}{5} = \frac{10 - 2 \ln(17) + 2 \ln(2)}{5} = 2 + \frac{2}{5} \ln \left(\frac{2}{17} \right).$ Ainsi $\frac{g(4) - g(-1)}{5} \approx 1,14.$ h) Le domaine de définition est $\mathbb{R}$ (qui est symétrique). La propriété $g''(x) = g''(-x)$ signifie donc ici que g'' est une fonction paire. La courbe représentative de g'' est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.	
--	---	--

B2	On considère $M(2;0)$, la droite $t : 5x + 2y - 2 = 0,$ et la droite $s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ a) D'après l'équation paramétrique de s, on a $x = 2 - k, \quad y = -2 + k.$ On remplace dans l'équation de t : $5(2 - k) + 2(-2 + k) - 2 = 0.$ Donc $10 - 5k - 4 + 2k - 2 = 0 \iff 4 - 3k = 0.$ Ainsi $k = \frac{4}{3}.$ Donc $x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \quad y = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.$ $P \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3} \right).$ b) Un vecteur directeur de s est $\vec{u}_s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Pour la droite $t : 5x + 2y - 2 = 0$, un vecteur normal est $(5;2)$, donc un vecteur directeur est $\vec{u}_t = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$ On calcule le produit scalaire : $\vec{u}_s \cdot \vec{u}_t = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = -7 \neq 0.$ Les droites ne sont donc pas perpendiculaires. $t \text{ et } s \text{ ne sont pas perpendiculaires.}$	15
-----------	---	-----------

c) L'angle θ entre les deux droites vérifie

$$\cos \theta = \frac{|\vec{u}_s \cdot \vec{u}_t|}{\|\vec{u}_s\| \|\vec{u}_t\|}.$$

Donc

$$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{2}\sqrt{29}} = \frac{7}{\sqrt{58}}.$$

Ainsi

$$\theta = \arccos\left(\frac{7}{\sqrt{58}}\right) \approx 23,2^\circ.$$

d) La distance du point $M(2;0)$ à la droite $t : 5x + 2y - 2 = 0$ est

$$d(M, t) = \frac{|5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

Donc

$$d(M, t) = \frac{8}{\sqrt{29}}.$$

e) Le cercle de centre $M(2;0)$ et de rayon 4 a pour équation

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4^2.$$

Donc

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 16.$$

Ainsi

$$x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0.$$

f) Après un déplacement de 5 unités vers la droite, le centre devient

$$M'(7;0).$$

Le rayon est doublé, donc il devient 8. L'équation du nouveau cercle est

$$(x - 7)^2 + y^2 = 64.$$

Pour chercher l'intersection avec l'axe des ordonnées, on pose $x = 0$:

$$(0 - 7)^2 + y^2 = 64.$$

Donc

$$49 + y^2 = 64,$$

d'où

$$y^2 = 15.$$

Ainsi

$$y = \pm\sqrt{15}.$$

Les points d'intersection sont donc

$$(0; \sqrt{15}) \quad \text{et} \quad (0; -\sqrt{15}).$$

B3

Il y a 23 élèves au départ.

a) L'école choisit 3 élèves parmi 23. L'ordre ne compte pas, donc on utilise une

15

combinaison :

$$\binom{23}{3} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1771.$$

Donc

1771 façons.

- b) Après avoir sélectionné les 3 élèves pour l'entreprise technologique, il reste 20 élèves.

L'entreprise technologique est exclue. Il reste donc :

$$2 + 2 + 3 = 7$$

entreprises disponibles.

Pour remplir le formulaire, un élève doit choisir une entreprise en premier choix, puis une entreprise différente en deuxième choix.

Il y a donc 7 choix possibles pour le premier choix, puis 6 choix possibles pour le deuxième choix.

Ainsi, le nombre de façons de remplir le formulaire est :

$$7 \times 6 = 42.$$

Donc un élève choisi au hasard peut remplir le formulaire de

42

façons différentes.

- c) Chaque élève choisit indépendamment, et la probabilité qu'un élève choisisse une entreprise de construction est constante et égale à 0,3.

On répète donc 20 fois une épreuve de Bernoulli, qui a deux issues possibles : le succès (stage en entreprise) ou l'échec (pas de stage en entreprise), de probabilité de succès $p = 0,3$. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, et ces épreuves de Bernoulli sont répétées de manières identiques, successives et indépendantes.

Ainsi

$$X \sim \mathcal{B}(20; 0,3).$$

- d) On cherche

$$P(X = 5) = \binom{20}{5} (0,3)^5 (0,7)^{15}.$$

Donc

$$P(X = 5) \approx 0,178863.$$

À 3 décimales près :

$$P(X = 5) \approx 0,179.$$

- e) On cherche

$$P(2 \leq X < 8) = P(2 \leq X \leq 7).$$

$$P(2 \leq X \leq 7) = \sum_{k=2}^7 \binom{20}{k} (0,3)^k (0,7)^{20-k}.$$

On obtient

$$P(2 \leq X \leq 7) \approx 0,764635.$$

À 3 décimales près :

$$P(2 \leq X < 8) \approx 0,765.$$

f) On cherche

$$P(X \geq 15) = \sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} (0,3)^k (0,7)^{20-k}.$$

Donc

$$\boxed{P(X \geq 15) \approx 0,00004.}$$

g) Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$, on a

$$E(X) = np, \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Ici,

$$E(X) = 20 \times 0,3 = 6.$$

Et

$$\sigma = \sqrt{20 \times 0,3 \times 0,7} = \sqrt{4,2} \approx 2,05.$$

Donc

$$\boxed{E(X) = 6 \quad \text{et} \quad \sigma \approx 2,05.}$$