

Racines carrées

I) Un peu d'histoire

L'idée de la racine carrée naît dans l'Antiquité, en lien avec la géométrie et les besoins pratiques de calcul. Les scribes mésopotamiens (env. -2000 à -1700) savaient déjà extraire des racines carrées de certains nombres. Sur des tablettes d'argile, on retrouve des calculs d'approximation de racines. Ils utilisaient ces méthodes pour la construction et la division des terres.

Les pythagoriciens (Grèce antique, env. -500) découvrent que la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut pas s'exprimer comme le rapport de deux entiers : c'est $\sqrt{2}$, un nombre irrationnel. Cette découverte bouleverse leur vision du monde où « tout est nombre ». Selon la légende, Hippase de Métaponte, qui aurait révélé ce secret, trouva la mort noyé, peut-être exécuté par la confrérie.

Euclide (Grèce, env. -300) dans ses *Éléments*, traite des constructions géométriques permettant d'obtenir des racines carrées, mais sans notation algébrique. La racine carrée est donc d'abord pensée comme un problème géométrique : « trouver le côté d'un carré d'aire donnée ».

Les mathématiciens indiens (Aryabhata, Brahmagupta, Ve – VIIe siècles) développent des méthodes d'extraction de racines carrées très proches de l'algorithme enseigné dans nos écoles. Ces techniques sont transmises et perfectionnées dans le monde arabe, notamment par Al-Khwarizmi (IXe siècle), dont le mot algorithme vient du nom.

Grâce aux traductions arabo-latines, la racine carrée devient un outil de calcul courant en Europe médiévale et lors de la renaissance. Le symbole moderne $\sqrt{\quad}$ apparaît au XVIe siècle : introduit par Christoph Rudolff (1525) sous la forme d'un « v » allongé, il évolue vers le symbole actuel.

II) La famille des racines carrées

A) Définition et vocabulaire

Définition



La racine carrée de a est le nombre (toujours positif ou nul) dont le carré est a .

Exemples



$$3^2 = 9 \text{ donc } \sqrt{9} = 3$$

$$2,6^2 = 6,76 \text{ donc } \sqrt{6,76} = 2,6$$

C'est impossible car le carré d'un nombre est toujours positif ou nul !
Ainsi, $\sqrt{-2}$ n'existe pas dans l'ensemble des nombres réels (que l'on note $\mathbb{R}$).

B) Quelques nombres particuliers

Exemples |||

$$\sqrt{0} = 0 \quad \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \quad \sqrt{3} \approx 1,732$$

Il est à noter que les nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ ne sont ni décimaux, ni des rationnels, de même que $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc.

C) Racines de carrés parfaits

Quelques racines sont à connaître par cœur :

Par cœur |||

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{36} = 6 \quad \sqrt{49} = 7 \quad \sqrt{64} = 8 \quad \sqrt{81} = 9$$

D) Racine carrée d'un carré

Propriété ||| Pour $a \geq 0$, on a : $\sqrt{a^2} = a$

Voici quelques exemples en langage compréhensible :

$$\sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{5^2} = 5, \quad \sqrt{9^2} = 9$$

III) Carré d'une racine carrée

Pour $a \geq 0$, on a :

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$