

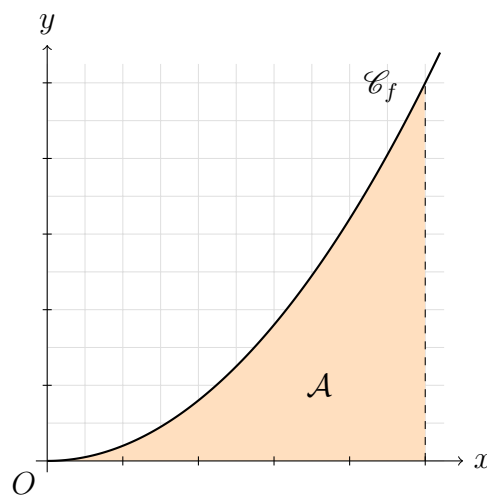
Activité : la quadrature de la parabole et Riemann

On considère la fonction carrée

$$f : x \mapsto x^2.$$

On souhaite déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par :

- l'axe des abscisses ;
- l'axe des ordonnées ;
- la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction carrée ;
- la droite d'équation $x = 1$.

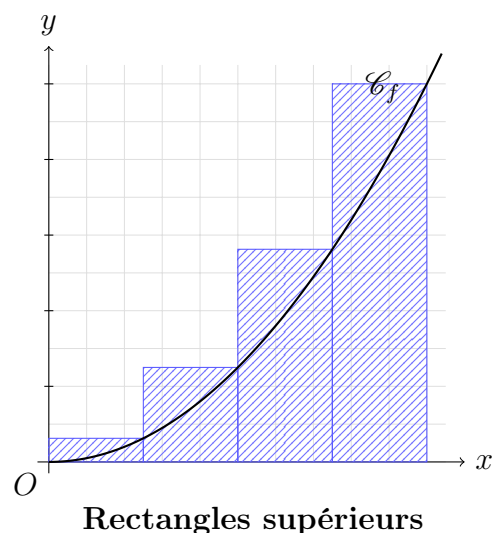
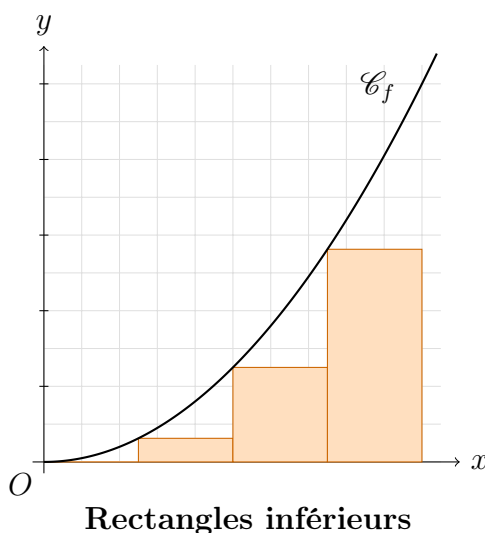


L'idée consiste à **encadrer cette aire à l'aide de rectangles**.

1

On partage l'intervalle $[0; 1]$ en **4 intervalles** de même longueur.

- a) Calculer la somme des aires des rectangles **coloriés**.
- b) Calculer la somme des aires des rectangles **hachurés**.
- c) En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.



$$\frac{7}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{15}{32}$$

Correction

Chaque rectangle a pour largeur $\frac{1}{4}$.
Pour les rectangles inférieurs,

$$\begin{aligned} u_4 &= \frac{1}{4} \left[0^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right] \\ &= \frac{0 + 1 + 4 + 9}{64} = \frac{7}{32}. \end{aligned}$$

Pour les rectangles supérieurs,

$$\begin{aligned} v_4 &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2 \right] \\ &= \frac{1 + 4 + 9 + 16}{64} = \frac{15}{32}. \end{aligned}$$

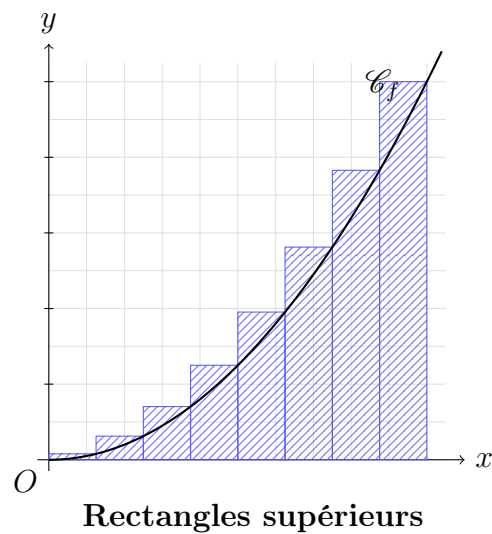
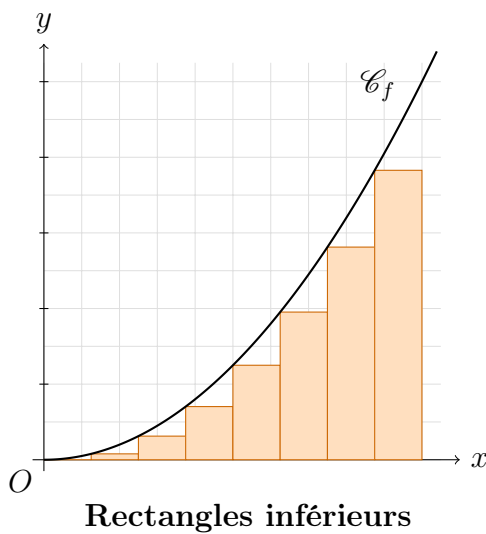
Ainsi,

$$\frac{7}{32} \leq \mathcal{A} \leq \frac{15}{32}.$$

2

On partage maintenant l'intervalle $[0; 1]$ en **8 intervalles** de même longueur.

- Calculer la somme des aires des rectangles **coloriés**.
- Calculer la somme des aires des rectangles **hachurés**.
- En déduire un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.
- Comparer cet encadrement à celui obtenu à la question précédente.



$$\frac{35}{128} \leq \mathcal{A} \leq \frac{51}{128}$$

Correction

Chaque rectangle a maintenant pour largeur $\frac{1}{8}$.
Pour les rectangles inférieurs,

$$u_8 = \frac{0^2 + 1^2 + \dots + 7^2}{8^3} = \frac{140}{512} = \boxed{\frac{35}{128}}.$$

Pour les rectangles supérieurs,

$$v_8 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 8^2}{8^3} = \frac{204}{512} = \boxed{\frac{51}{128}}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{35}{128} \leq \mathcal{A} \leq \frac{51}{128}}.$$

Ce nouvel encadrement est plus précis que le précédent puisque

$$\frac{7}{32} < \frac{35}{128} \leq \mathcal{A} \leq \frac{51}{128} < \frac{15}{32}.$$

3

On divise désormais l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même longueur.

- Quelle est la largeur de chacun des rectangles ?
- Quelles sont les abscisses des points de subdivision ?

Les points de subdivision ont pour abscisses

$$0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{n-1}{n}, \quad 1.$$

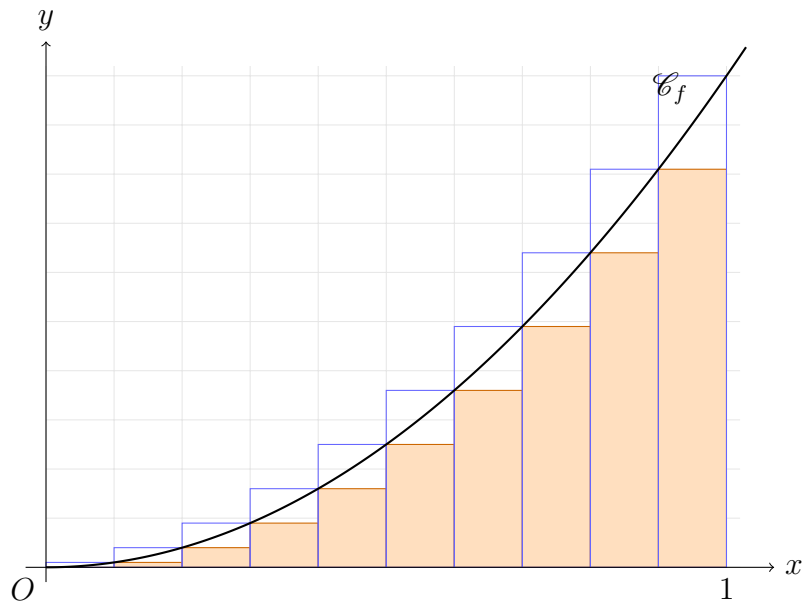
Correction

- La largeur de chacun des rectangles est

$$\boxed{\frac{1}{n}}.$$

- Les abscisses des points de subdivision sont

$$\boxed{0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad \frac{n-1}{n}, \quad 1}.$$



4

On note u_n la somme des aires des rectangles **inférieurs** et v_n la somme des aires des rectangles **supérieurs**.

- Exprimer u_n en fonction de n .
- Exprimer v_n en fonction de n .
- Justifier que

$$u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n.$$

Aide

On pourra utiliser la formule

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On pourra commencer par écrire

$$u_n = \frac{1}{n} \left[0^2 + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right]$$

et

$$v_n = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right].$$

Correction

Pour les rectangles inférieurs,

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \boxed{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}}. \end{aligned}$$

Pour les rectangles supérieurs,

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \boxed{\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}}. \end{aligned}$$

Comme la fonction carrée est croissante sur $[0; 1]$, chaque rectangle inférieur est contenu dans le domaine situé sous la courbe, tandis que chaque rectangle supérieur contient la partie correspondante de ce domaine. Par conséquent,

$$\boxed{u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n}.$$

5

a) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

b) En utilisant l'encadrement

$$u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n,$$

en déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{3}}$$

Correction

On a

$$u_n = \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}}.$$

Or

$$u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{3}}.$$

À
retenir

Les suites (u_n) et (v_n) sont appelées respectivement **sommes de Riemann inférieures** et **sommes de Riemann supérieures** associées à la fonction carrée sur $[0; 1]$.

Lorsque le nombre de subdivisions devient de plus en plus grand, les sommes u_n et v_n se rapprochent toutes les deux de l'aire $\mathcal{A}$.

Dans le cas de la fonction carrée,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}.$$

Généralisation

Plus généralement, si f est une fonction **continue et positive** sur $[a; b]$, l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ peut être approchée par des sommes d'aires de rectangles.

Lorsque le nombre de subdivisions tend vers $+\infty$, ces sommes convergent vers l'aire située sous la courbe.

Cette aire est notée

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$