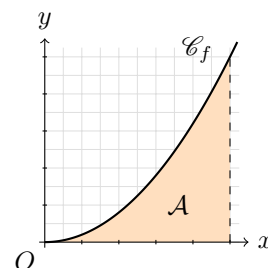


Activité : la quadrature de la parabole et Riemann

On considère la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$. On souhaite déterminer l'aire $\mathcal{A}$ délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $x = 1$.

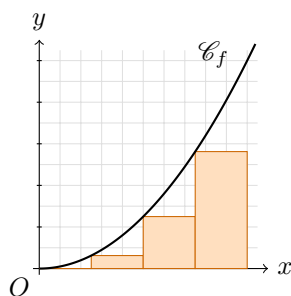
L'idée consiste à **encadrer cette aire à l'aide de rectangles**.



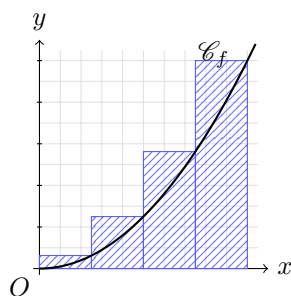
1

On partage $[0; 1]$ en **4 intervalles** de même longueur.

- Calculer la somme des aires des rectangles **coloriés**.
- Calculer la somme des aires des rectangles **hachurés**.
- En déduire un encadrement de $\mathcal{A}$.



Rectangles inférieurs



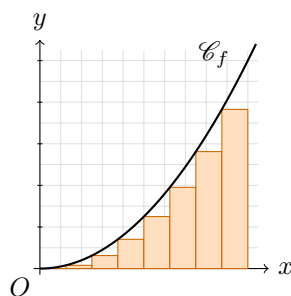
Rectangles supérieurs

$$\leq \mathcal{A} \leq$$

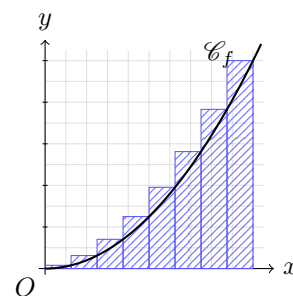
2

On partage $[0; 1]$ en **8 intervalles** de même longueur.

- Calculer la somme des aires des rectangles **coloriés**.
- Calculer la somme des aires des rectangles **hachurés**.
- En déduire un nouvel encadrement de $\mathcal{A}$.
- Comparer cet encadrement au précédent.



Rectangles inférieurs



Rectangles supérieurs

$$\leq \mathcal{A} \leq$$

3

On divise désormais $[0; 1]$ en n intervalles de même longueur.

- Quelle est la largeur de chacun des rectangles ?
- Quelles sont les abscisses des points de subdivision ?

4

On note u_n la somme des aires des rectangles **inférieurs** et v_n celle des rectangles **supérieurs**.

- Exprimer u_n en fonction de n .
- Exprimer v_n en fonction de n .
- Justifier que $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$.

Aide : On pourra utiliser

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

5

- Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

- En utilisant $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$, en déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

$$\mathcal{A} =$$