

Radicaux

A) Définition

Définition

Soit a un nombre réel positif. La **racine carrée** de a est l'unique réel positif dont le carré est égal à a .

La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{}$ s'appelle le « radical ».

Autrement dit, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $(\sqrt{a})^2 = a$.

Remarques

- $\sqrt{0} = 0$
- La racine carrée du nombre -16 n'existe pas dans $\mathbb{R}$.
- $\sqrt{49} = 7$ En effet, 7 est le seul nombre positif dont le carré vaut 49.
- -7 n'est pas la racine carrée de 49, même si $(-7)^2 = 49$.

Exercices

Calculer, sans calculatrice.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{36} & B &= \sqrt{13^2} & C &= \sqrt{6,3^2} & D &= \sqrt{(-13)^2} & E &= \sqrt{16+9} \\ F &= \sqrt{|-16|} & G &= -\sqrt{81} & H &= \sqrt{(-8)^2} & I &= \sqrt{-7^2} & J &= \sqrt{-12 \times (-3)} \end{aligned}$$

Remarque

Soit $a \in \mathbb{R}$. $\sqrt{a^2} = |a|$

B) Propriétés

Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs avec $b \neq 0$. On a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Méthode

Ces propriétés permettent de simplifier des racines carrées, l'objectif est alors d'écrire la racine carrée d'un nombre entier sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers naturels et b le plus petit possible.

Exemples

$$\begin{aligned} \sqrt{48} &= \sqrt{16 \times 3} & \sqrt{288} &= \sqrt{144 \times 2} & 3\sqrt{98} &= 3\sqrt{49 \times 2} \\ &= \sqrt{16} \times \sqrt{3} & &= \sqrt{144} \times \sqrt{2} & &= 3\sqrt{49} \times \sqrt{2} \\ &= 4 \times \sqrt{3} & &= 12 \times \sqrt{2} & &= 3 \times 7 \times \sqrt{2} \\ &= 4\sqrt{3} & &= 12\sqrt{2} & &= 21\sqrt{2} \end{aligned}$$

Attention, dans le premier exemple, si on décompose 48 en 4×12 , on peut arriver à $\sqrt{48} = 2\sqrt{12}$.

C'est une simplification, mais elle n'est pas maximale. Pour trouver rapidement la meilleure simplification, il faut dégager le plus grand facteur possible qui soit un carré d'entier, donc à trouver dans la liste des **carrés parfaits** :

$0 - 1 - 4 - 9 - 16 - 25 - 36 - 49 - 64 - 81 - 100 - 121 - 144 - 169 - 196 - 225 - 256 - 289 - 324 - 361 - 400 - \dots$

Il faut connaître par coeur la liste des carrés d'entiers jusqu'à $12^2 = 144$, au moins.

Propriété ||| Soient a et b deux réels strictement positifs. $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Remarque ||| On savait déjà que pour a et b non nuls, $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.
Comme pour les puissances, les racines carrées s'accommodent mieux de la multiplication qu'à l'addition.

C) Applications

Exercices ||| Écrire chaque expression sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers et b le plus petit possible.

$$\begin{array}{lll} A = 3\sqrt{2} + \sqrt{18} & B = 4\sqrt{3} - 5\sqrt{48} & C = 5\sqrt{12} - 2\sqrt{75} \\ D = \sqrt{288} + 3\sqrt{162} & E = \sqrt{28} + 2\sqrt{448} & F = 3 + 5\sqrt{441} \end{array}$$

Méthode ||| Il est important de savoir se débarrasser des radicaux au dénominateur d'une écriture fractionnaire. L'idée est bien sûr de multiplier le numérateur et le dénominateur par un nombre bien choisi.

Exercice ||| Écrire sans radicaux au dénominateur.

$$\begin{array}{llll} A = \frac{3}{\sqrt{5}} & B = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{8}} & C = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{3}} & D = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ E = \frac{4\sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} & F = \frac{1}{\sqrt{13} - \sqrt{12}} & G = \frac{8}{\sqrt{10} + \sqrt{3}} & H = \frac{3\sqrt{2}}{4(3 - \sqrt{2})} \end{array}$$

Le nombre $\sqrt{2}$ est-il un nombre rationnel ?

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Cela signifie que l'on peut écrire $\sqrt{2}$ sous forme de fraction, et en particulier sous forme de fraction irréductible. Il existe alors deux entiers p et q (avec $q \neq 0$) tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

et on suppose que cette fraction est irréductible.

En élevant au carré, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$, puis $p^2 = 2q^2$.

Ainsi, p^2 est un nombre pair. Or le carré d'un nombre impair est impair. Donc p est pair.

Il existe donc un entier k tel que

$$p = 2k.$$

En remplaçant dans l'égalité précédente, $(2k)^2 = 2q^2$, d'où $4k^2 = 2q^2$, puis

$$q^2 = 2k^2.$$

Ainsi, q^2 est pair, donc q est lui aussi pair.

Les deux entiers p et q sont donc pairs. Ils sont tous les deux divisibles par 2, ce qui est impossible puisque la fraction $\frac{p}{q}$ était supposée irréductible.

Ainsi, l'hypothèse de départ est fausse et le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel (on note $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Nous avons fait ici ce qui s'appelle un raisonnement par l'absurde.

Exemple

Diagramme récapitulatif

