

Puissances

A) Définitions

Définition

Soient a un nombre réel et n un nombre entier strictement positif.
Le produit $a \times a \times a \times \dots \times a$ constitué de n facteurs tous égaux à a est une **puissance** de a .
Il se note a^n et n est appelé l'**exposant**.
 a^n se prononce « a exposant n » (ou parfois « a puissance n »).

Exemple

81 est une puissance de 3. En effet, $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. On note $81 = 3^4$.
 $5^7 = 78\,125$, donc 78 125 est une puissance de 5. 7 est l'exposant.

Remarque

Les puissances de 2 sont très utilisées en informatique (notamment). Les premières puissances de 2 sont :

2 4 8 16 32 64 128 256 512 1 024 2 048

B) Cas particulier : les puissances de 10

Remarque

$10^1 = 10$ $10^2 = 100$ $10^3 = 1\,000$ $10^4 = 10\,000$...

Ainsi, pour un entier $n > 0$, 10^n est l'entier écrit avec un seul chiffre « 1 » suivi de n chiffre(s) « 0 ».

Exercice

Calcul mental :

$3 \times 10^5 = \dots$	$4,803 \times 10^7 = \dots$	$17,592 \times 10^2 = \dots$
$0,006\,328 \times 10^4 = \dots$	$0,000\,045\,3 \times 10^{11} = \dots$	$11\,700 \times 10^4 = \dots$
$177 \div 10^4 = \dots$	$4\,987,345 \div 10^3 = \dots$	$0,005\,2 \div 10^2 = \dots$
$\frac{1\,234\,567}{10^5} = \dots$	$\frac{1\,000\,000}{10^6} = \dots$	$\frac{12}{3 \times 10^4} = \dots$

$10^1 + 10^3 + 10^5 = \dots$ $2 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 4 = \dots$

Décomposer de même 45 129 et 3 200 405 217.

C) Exposant négatif

$10^3 = 1\,000$ ✓ 10^2 , c'est 10 fois moins, on divise par 10 pour l'obtenir.

$10^2 = 100$ ✓ À nouveau, on divise par 10 pour diminuer d'un exposant.

$10^1 = 10$ ✓ Logiquement, pour obtenir 10^0 , on divise à nouveau par 10.

$10^0 = 1$ ✓ Pour passer à ce que l'on notera 10^{-1} , divisons par 10.

$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$ ✓ Pourquoi s'arrêter ? Divisons encore par 10.

$10^{-2} = 0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ ✓ Et encore une fois.

$10^{-3} = 0,001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3}$ ✓ etc.

Remarques

- $10^0 = 1$
- $10^{-5} = 0,00001$: le chiffre 1 est placé au cinquième rang après la virgule.
- Pour tout entier $n > 0$, 10^{-n} s'écrit sous forme décimale avec le chiffre 1 au n -ième rang après la virgule.

Exercice

Calcul mental :

$$\begin{array}{lll}
 7 \times 10^{-3} = \dots & 34,503 \times 10^{-5} = \dots & 1\,207\,456 \times 10^{-4} = \dots \\
 0,03 \times 10^{-7} = \dots & 0,000\,004\,9 \times 10^{-2} = \dots & 4\,000\,500 \times 10^{-9} = \dots \\
 4,802 \div 10^{-2} = \dots & 150 \div 10^{-4} = \dots & 0,000\,037 \div 10^{-12} = \dots
 \end{array}$$

Remarque

Soit n un entier quelconque. Diviser par 10^n revient à multiplier par 10^{-n} .

D) Propriétés

Propriété

Soient a et b deux nombres réels non nuls. Soient m et n deux nombres entiers.

$$\begin{array}{lll}
 \bullet a^m \times a^n = a^{m+n} & \bullet \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} & \bullet (a^m)^n = a^{m \times n} \\
 \bullet a^n \times b^n = (a \times b)^n & & \bullet \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n
 \end{array}$$

E) Notation scientifique

En sciences, on utilise parfois une façon particulière d'écrire les nombres : on les note en écriture scientifique. Cela est particulièrement utile pour les nombres très grands ou très petits.

Prenons le nombre 913,4. À l'aide de puissances de 10, on peut l'écrire de plusieurs manières différentes sous la forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est une puissance de 10. Par exemple :

$$913,4 = 913,4 \times 10^0 = 91,34 \times 10^1 = 9,134 \times 10^2 = 0,9134 \times 10^3 = \dots \quad \text{ou}$$

$$913,4 = 9\,134 \times 10^{-1} = 91\,340 \times 10^{-2} = 913\,400 \times 10^{-3} = \dots$$

Parmi ces différentes écritures, toutes égales à 913,4 seule $9,134 \times 10^2$ est son écriture scientifique.

Considérons maintenant le nombre 0,004 02. On a :

$$0,004\,02 = 0,040\,2 \times 10^{-1} = 0,402 \times 10^{-2} = 4,02 \times 10^{-3} = 40,2 \times 10^{-4} = \dots$$

Parmi ces différentes écritures, toutes égales à 0,004 02, seule $4,02 \times 10^{-3}$ est son écriture scientifique.

Définition

Écrire un nombre non nul dans sa **notation scientifique**, c'est l'écrire sous la forme $a \times 10^n$ où a est un nombre réel tel que $1 \leq |a| < 10$ et n est un entier.

Exercice

Compléter le tableau suivant.

Écriture décimale	Écriture scientifique
45 000 000	
	$9,17 \times 10^{11}$
-95 020 000 000 000	
	$1,02 \times 10^{12}$
0,000 000 036 08	
	$8,04 \times 10^{-5}$
$137,53 \times 10^8$	
507×10^{-7}	
400 000 000 000 000 000 000	