

Intervalles et expressions algébriques

I) Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

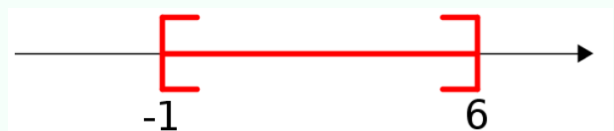
L'ensemble de tous les nombres x tels que $a \leq x \leq b$ est un **intervalle** de $\mathbb{R}$. Il se note $[a ; b]$.

a et b sont appelés les **bornes** de l'intervalle.

Exemple

L'intervalle de tous les nombres réels compris entre -1 et 6 , bornes incluses, est représenté ci-dessous. On le note $[-1 ; 6]$.

On a $4 \in [-1 ; 6]$ ou encore $-1 \in [-1 ; 6]$, mais $-4 \notin [-1 ; 6]$.



On a aussi : $\{1 ; 5\} \subset [-1 ; 6]$.

Remarques

- On peut également avoir besoin d'exclure les bornes de l'intervalle. Par exemple, tous les nombres x tels que $-1 < x \leq 6$ composent l'intervalle $] -1 ; 6]$.
- L'ensemble de tous les nombres strictement supérieurs à un réel a est aussi un intervalle, noté $]a ; +\infty[$.
- $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels et sont donc toujours exclus des intervalles.

Compléter le tableau suivant.

Exercice

Inégalité	Intervalle	Représentation sur une droite graduée
$-14 \leq x \leq -3,5$		
	$] - 3 ; -1[$	
$7 < x \leq 10$		
$x \leq 13$		
	$] - \infty ; -5[$	
$x > 10$		
	$\mathbb{R} \setminus [3 ; +\infty[$	

Notation

- L'intervalle $[0 ; +\infty[$ se note plus simplement $\mathbb{R}_+$.
- L'intervalle $] - \infty ; 0]$ se note plus simplement $\mathbb{R}_-$.
- L'ensemble des réels non nuls se note $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou plus simplement $\mathbb{R}^*$.
- L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note $\emptyset$.

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations et inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions.

$$13x - 5 = 6x + 23 \quad 4(2x + 3) \leq 5x - 29 \quad 12x^2 - 5x + 10 > (3x - 7)(4x - 8)$$

Définition

Soient I et J deux intervalles non vides.

- L'**intersection** de ces deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J . On note cet ensemble $I \cap J$ et on prononce « I inter J ».
- La **réunion** ou l'**union** de ces deux intervalles est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J (éventuellement aux deux). On note cet ensemble $I \cup J$ et on prononce « I union J ».

Exemple

Si $I =]-\infty ; 1[$ et $J =]-5 ; 4]$, alors :

$$I \cap J =]-5 ; 1[\quad I \cup J =]-\infty ; 4]$$



II) Tableaux de signes d'un produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $9x(6-5x)(x+10) < 0$.

Pour cela, on détermine le signe de chacun des trois facteurs en fonction de x , puis on regroupe les résultats dans un **tableau de signes**.

Signe de $9x$	Signe de $6-5x$	Signe de $x+10$
$9x \geq 0 \iff x \geq 0$	$6-5x \geq 0 \iff -5x \geq -6$ $\iff x \leq \frac{6}{5}$	$x+10 \geq 0 \iff x \geq -10$

Pour le tableau de signes, on met en première ligne pour x les valeurs (dans l'ordre croissant) pour lesquelles un des facteurs s'annule. On complète ensuite les cases du tableau en indiquant le signe de chaque expression sur chaque intervalle et on place un « 0 » lorsque l'expression correspondante s'annule.

Exemple

x	$-\infty$	-10	0	$\frac{6}{5}$	$+\infty$
$9x$	-	-	0	+	+
$6-5x$	+	+	+	0	-
$x+10$	-	0	+	+	+
$9x(6-5x)(x+10)$	+	0	-	0	-

On lit que l'inéquation $9x(6-5x)(x+10) < 0$ a pour ensemble solution :

$$\mathcal{S} =]-10; 0[\cup \left] \frac{6}{5}; +\infty \right[$$

Exercice

||| Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2+7x)(6x^2-5) \geq 0$.

III) Tableaux de signes d'un quotient

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{(4-7x)(3x-2)}{5-x} \leq 0$.

Signe de $4-7x$	Signe de $3x-2$	Signe de $5-x$
$4-7x \geq 0 \iff -7x \geq -4$	$3x-2 \geq 0 \iff 3x \geq 2$	$5-x \geq 0 \iff 5 \geq x$
$4-7x \geq 0 \iff x \leq \frac{4}{7}$	$3x-2 \geq 0 \iff x \geq \frac{2}{3}$	$5-x \geq 0 \iff x \leq 5$

x	$-\infty$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{3}$	5	$+\infty$
$4-7x$	+	0	-	-	-
$3x-2$	-	-	0	+	+
$5-x$	+	+	+	0	-
$\frac{(4-7x)(3x-2)}{5-x}$	-	0	+	0	+

Attention : La valeur 5 est une **valeur interdite** pour notre quotient. Penser à mettre une double barre verticale pour $x = 5$ dans la dernière ligne.

On lit sur la dernière ligne du tableau que l'inéquation $\frac{(4-7x)(3x-2)}{5-x} \geq 0$ a pour ensemble solution :

$$S = \left[\frac{4}{7}; \frac{2}{3} \right] \cup]5; +\infty[$$

Exercice

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{(2+7x)(4x-5)}{(5-x)^2} > 0$.