

Intégration

Exercice 1

Calculer.

$$A = \int_{-2}^8 4 \, dx$$

$$B = \int_1^5 (t - 1) \, dt$$

$$C = \int_{-3}^8 \left(-\frac{3}{7}x + 4 \right) \, dx$$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$.

Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$.

Soient $a \geq 0$ et $h > 0$.

1) Justifier à l'aide du graphique que :

$$h f(a) \leq F(a+h) - F(a) \leq h f(a+h).$$

2) Encadrer alors $\frac{F(a+h) - F(a)}{h}$.

3) En déduire $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h}$.

4) On admet que l'on a le même résultat pour $h < 0$ (avec bien sûr $a+h > 0$).

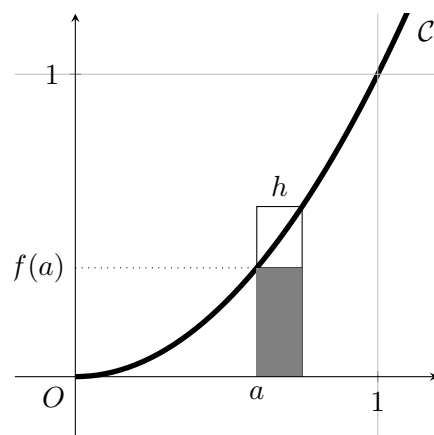
Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et donner $F'(x)$.

5) Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \frac{1}{3}x^3$.

a) Calculer la dérivée de $F - G$ sur $\mathbb{R}_+$. Qu'en déduit-on ?

b) Calculer $F(0) - G(0)$. En déduire $F(x)$.

c) Calculer $F(1)$. Interpréter géométriquement.



Exercice 3

Déterminer une primitive de chacune des fonctions données par les formules suivantes.

$$f_1(x) = 3x^3 + 7x^2 - 3$$

$$f_2(x) = 3 \sin x - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$f_3(x) = 7e^x + 3$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x} - 6x + \sqrt{2}$$

$$f_5(x) = 7e^{7x}$$

$$f_6(x) = e^{2x+1}$$

$$f_7(x) = \sin(3x + 4)$$

$$f_8(x) = \frac{7}{3x + 2}$$

$$f_9(x) = -5e^{7x}$$

$$f_{10}(x) = xe^{x^2}$$

$$f_{11}(x) = \frac{5}{2\sqrt{2x-3}}$$

$$f_{12}(x) = \frac{3}{\sqrt{7x+12}}$$

$$f_{13}(x) = \tan x$$

$$f_{14}(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f_{15}(x) = 84x^2 e^{4x^3-1}$$

$$f_{16}(x) = \frac{2}{1+x}$$

$$f_{17}(x) = \sin x$$

$$f_{18}(x) = e^{-2x}$$

$$f_{19}(x) = x^2 + 3x + 1$$

$$f_{20}(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f_{21}(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f_{22}(x) = \frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$f_{23}(x) = \frac{3}{x^7}$$

$$f_{24}(x) = \sqrt{3x-5}$$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes.

$$\int_{-8}^{11} 4 dx$$

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x-1) dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x dx$$

$$\int_1^2 \frac{4}{x} dx$$

$$\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int_4^5 e^{-x} dx$$

$$\int_1^2 e^{3 \ln x + 4} dx$$

$$\int_4^{25} \frac{5}{\sqrt{x}} dx$$

Exercice 5

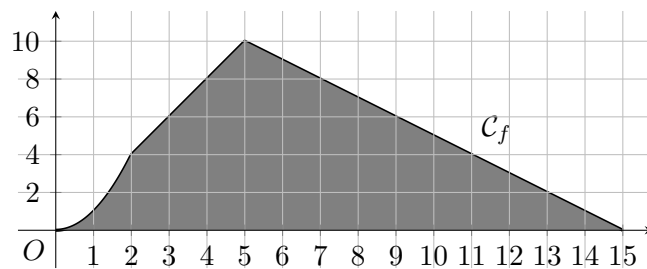
1) Déterminer le domaine de définition de $f : x \mapsto 3x^3 + \frac{x^5 - 2x^3}{16x^2 - 81}$.

2) Étudier la parité de f et calculer $\int_{-2}^2 f(x) dx$.

Exercice 6

Le domaine grisé ci-contre est délimité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 & \text{pour } x \in [0; 2] \\ f(x) = 2x & \text{pour } x \in [2; 5] \\ f(x) = -x + 15 & \text{pour } x \in [5; 15] \end{cases}$$

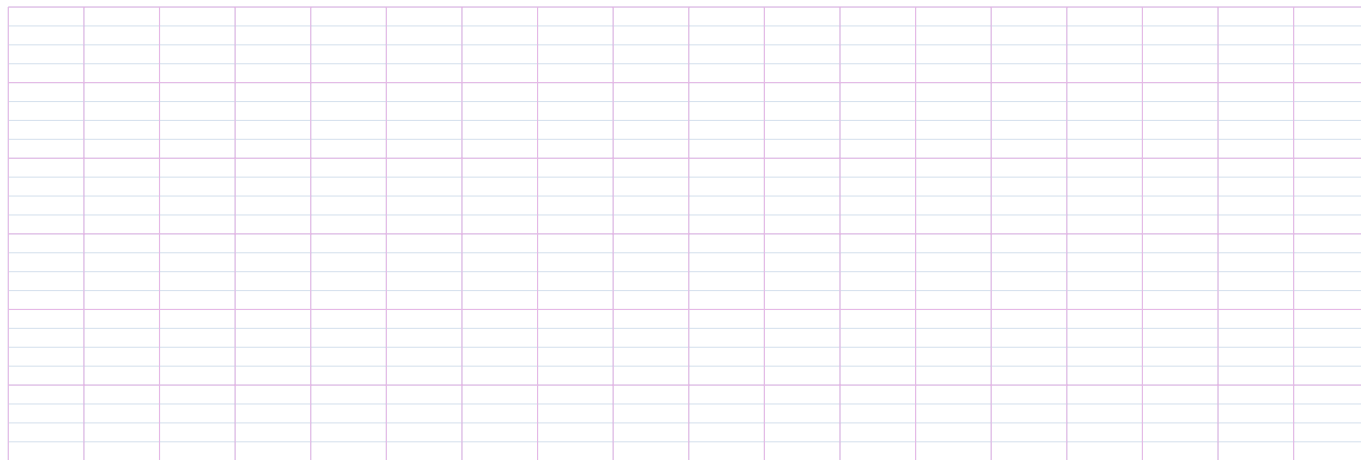


- 1) Calculer l'aire de ce domaine en *u.a.*.
- 2) Les unités sont de 4 *mm* en abscisses et 2 *mm* en ordonnées. Calculer l'aire du domaine grisé en *cm*².

Exercice 7

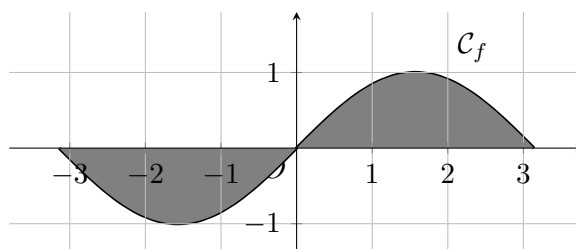
On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

- 1) Tracer $\mathcal{C}_f$ sur une feuille à grands carreaux (carrés de 8 *mm* de côté) dans un r.o.n. d'unité deux carreaux.
- 2) Montrer que $F : x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}_+$.
- 3) Calculer alors, en *cm*², l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 9$.

**Exercice 8**

$f : x \mapsto \sin x$ est représentée ci-contre sur $[-\pi; \pi]$.

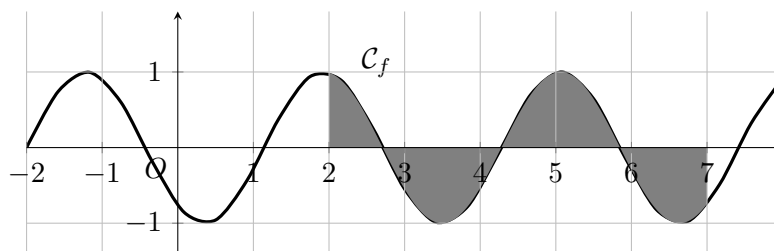
Calculer l'aire de la partie grisée en *u.a.*.



Exercice 9

$f : x \mapsto \sin(2x + 4)$ est représentée ci-contre.

Sans calculer, donner le signe de $\int_2^7 f(x) dx$.

**Exercice 10**

Donner le signe de chacun des nombres suivants.

$$I = \int_0^1 e^{-x^3} dx$$

$$J = \int_3^1 \ln^4 t dt$$

$$K = \int_{-2}^{-1} u e^u du$$

$$L = \int_4^1 (1-x)\sqrt{x+1} dx$$

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t - 1) dt$$

Exercice 11

On considère les fonctions $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ et $g : x \mapsto \frac{x^3}{1+x^2}$ définies sur $\mathbb{R}$ et on pose :

$$I_1 = \int_0^1 f(x) dx$$

$$I_2 = \int_0^1 g(x) dx$$

1) Montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \ln 2$.

2) Calculer $I_1 + I_2$. En déduire I_2 .

Exercice 12

Dans chaque cas, déterminer la primitive F de f telle que $F(a) = b$.

1) $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$ $a = 1$ et $b = 1$.

2) $f : x \mapsto 3 \sin(2x)$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $a = 0$ et $b = 2$.

3) $f : x \mapsto \frac{3e^x}{e^x + 3}$ $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ $a = 0$ et $b = 0$.

Exercice 13

Calculer $I = \int_0^1 \frac{1-x}{x+3} dx$.

On pourra trouver a et b tels que : $\frac{1-x}{x+3} = a + \frac{b}{x+3}$.