

Corrigé rapide Exercice 12

S4 - 2026-2027

Dans cet exercice, on travaille dans l'ensemble des nombres entiers (nons nuls). On peut traiter facilement le cas $n = 1$ à part.

1.

$$\begin{array}{ccccc} M_1 = 1 & M_2 = 3 & M_3 = 7 & M_4 = 15 & M_5 = 31 \\ M_6 = 63 & M_7 = 127 & M_8 = 255 & M_9 = 511 & M_{10} = 1023 \end{array}$$

2. On conjecture que :

$$\boxed{M_n \text{ premier} \implies n \text{ premier.}}$$

Autrement dit, une condition nécessaire pour que M_n soit premier est que n soit premier. C'est bien une conjecture (et non une propriété à ce stade), on "imagine" que cette implication est toujours vraie, sans l'avoir prouvée cependant.

3. Si n est pair, il existe un entier p tel que $n = 2p$. Alors :

$$\begin{aligned} M_n &= 2^{2p} - 1 \\ &= (2^p)^2 - 1 \\ &= (2^p - 1)(2^p + 1). \end{aligned}$$

Si $n > 2$, alors $p > 1$, et les deux facteurs sont strictement supérieurs à 1. Donc :

$$\boxed{M_n \text{ n'est pas premier.}}$$

4.

$$\begin{aligned} (a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k &= (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}) \\ &= a + a^2 + \cdots + a^n - (1 + a + \cdots + a^{n-1}) \\ &= \boxed{a^n - 1}. \end{aligned}$$

On va se resservir de cette égalité par la suite.

5. Si n n'est pas premier, on peut écrire :

$$n = pq$$

avec $p > 1$ et $q > 1$.

Alors :

$$\begin{aligned} M_n &= 2^{pq} - 1 \\ &= (2^p)^q - 1 \quad \text{on utilise maintenant l'égalité vue en 4.} \\ &= (2^p - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (2^p)^k \\ &\quad \text{autrement dit } M_n = (2^p - 1) \times T \text{ avec } T > 1 \end{aligned}$$

Ainsi, M_n est le produit de deux entiers strictement supérieurs à 1. Donc :

$$\boxed{M_n \text{ n'est pas premier.}}$$

On a donc montré que

$$\boxed{n \text{ non premier} \implies M_n \text{ non premier.}}$$

Ce qui est équivalent à

$$\boxed{M_n \text{ premier} \implies n \text{ premier.}}$$

C'est la propriété que l'on avait conjecturé en 2., nous venons de la **démontrer** proprement.
6.

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Or :

$$2047 = 23 \times 89.$$

Donc :

$$\boxed{M_{11} \text{ n'est pas premier.}}$$

Ainsi, la réciproque de la conjecture est fausse :

$$n \text{ premier} \not\Rightarrow M_n \text{ premier.}$$