

Exercice 1 :

Soit

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}.$$

La fonction f est définie lorsque $x - 1 \neq 0$. Ainsi :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Calculons la dérivée de f :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{(2x + 2)(x - 1) - (x^2 + 2x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x + 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}.$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2}.$$

Comme $(x - 1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$, le signe de $f'(x)$ est celui de $x(x - 2)$.

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
				$+\infty$	$\searrow$
				6	$\nearrow$
					$+\infty$

En effet :

$$f(0) = \frac{-2}{-1} = 2 \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{4 + 4 - 2}{1} = 6.$$

Recherche des asymptotes :

Lorsque x tend vers 1, le numérateur tend vers

$$1 + 2 - 2 = 1 > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0^+.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

Par conséquent :

La droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

On factorise le numérateur par $x - 1$

$$x^2 + 2x - 2 = (x + 3)(x - 1) + 1.$$

Donc :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = \frac{(x + 3)(x - 1) + 1}{x - 1} = x + 3 + \frac{1}{x - 1}.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) - (x + 3) = \frac{1}{x - 1}.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 1} = 0.$$

Ainsi :

La droite d'équation $y = x + 3$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 2 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1)e^{-x}$$

On écrit :

$$(3x + 1)e^{-x} = \frac{3x + 1}{e^x} = 3\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}.$$

Or :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1)e^{-x} = 0.$$

Calculons maintenant :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x + 2}{x + 4}\right).$$

On factorise par x :

$$\frac{x + 2}{x + 4} = \frac{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{4}{x}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{4}{x}}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{4}{x}} = 1.$$

On sait que la fonction $\ln$ est continue en 1, et que

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0.$$

Ainsi (par composée de limites) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x + 2}{x + 4}\right) = 0.$$