

Intégration (Partie 1)

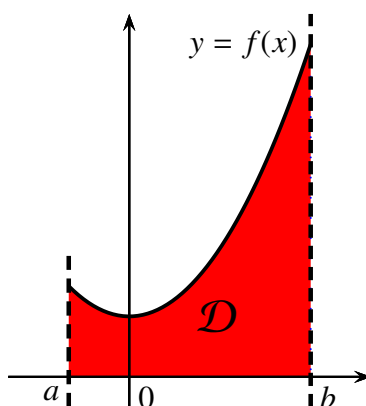
I) Intégrale d'une fonction continue et positive

A) Domaine associé à une fonction positive

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

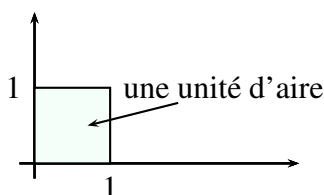
Le domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelé **domaine associé à la fonction f sur $[a; b]$** .

$$\mathcal{D} = \{M(x; y) \mid a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$



B) Unité d'aire

Dans un repère, le rectangle dont les côtés mesurent une unité sur chacun des deux axes a une aire égale à une **unité d'aire**, notée généralement u.a.



C) Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition

Soit f une fonction **continue et positive** sur $[a; b]$, avec $a \leq b$.

On appelle **intégrale de a à b de la fonction f** l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine associé à f sur $[a; b]$.

Cette intégrale est notée

$$\int_a^b f(x) dx$$

Remarque

Dans l'écriture

$$\int_a^b f(x) dx,$$

a et b sont appelés les **bornes de l'intégrale**.
La variable x est une **variable muette**. Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du.$$

Exemple

Calculer

$$\int_0^2 (2x + 1) dx$$

par des considérations géométriques.

D) Valeur moyenne d'une fonction continue positive

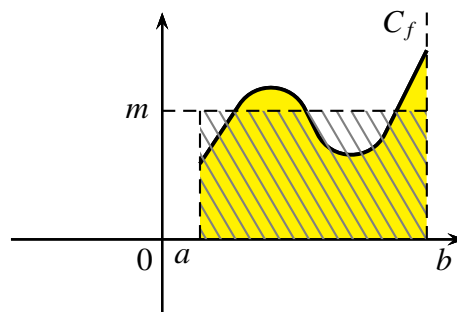
Définition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, avec $a < b$.
La **valeur moyenne** de f sur $[a; b]$ est le réel

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation graphique :

L'aire du domaine associé à f sur $[a; b]$ est égale à celle du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur m .



II) Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

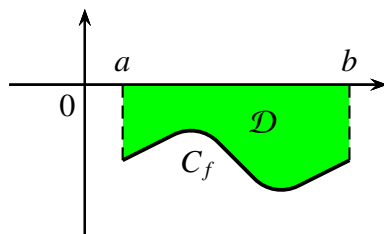
A) Cas d'une fonction négative

Propriété

Soit f une fonction continue et négative sur $[a; b]$, avec $a \leq b$.
Alors

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire géométrique du domaine compris entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



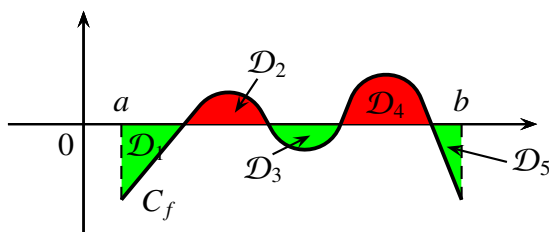
Remarque

Une intégrale peut donc être négative.
Par exemple,

$$\int_1^3 (-x) dx < 0.$$

B) Cas d'une fonction changeant de signe

Lorsque f change de signe sur $[a; b]$, les aires situées au-dessus de l'axe des abscisses interviennent positivement et celles situées en dessous interviennent négativement.



Ainsi, par exemple,

$$\int_a^b f(x) dx = -\mathcal{A}(\mathcal{D}_1) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_2) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_3) + \mathcal{A}(\mathcal{D}_4) - \mathcal{A}(\mathcal{D}_5).$$

Remarque

Une intégrale peut être nulle sans que la fonction soit identiquement nulle.
Par exemple,

$$\int_{-1}^3 (2x - 2) dx = 0.$$

III) Primitives d'une fonction

A) Primitive

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On appelle **primitive de f sur I** toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

$$f(x) = x, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Puis déterminer une primitive, sur un intervalle adapté, de

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \frac{1}{x}, \quad e^{-x}.$$

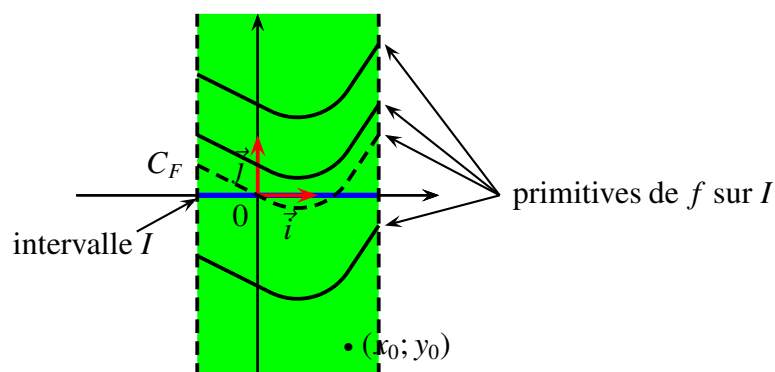
B) Ensemble des primitives

Théorème

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I .
Alors les primitives de f sur I sont exactement les fonctions

$$x \mapsto F(x) + k$$

où $k \in \mathbb{R}$.



Démonstration :

Si $G(x) = F(x) + k$, alors

$$G'(x) = F'(x) = f(x).$$

Ainsi, G est également une primitive de f .

Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f , alors

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Comme I est un intervalle, $G - F$ est constante sur I .

Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$G = F + k.$$

C) Primitive et condition initiale

Théorème

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I . Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Il existe une **unique primitive** F de f sur I telle que

$$F(x_0) = y_0.$$

Exemple

Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$H(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + a.$$

1. Vérifier que H est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.
2. Déterminer la primitive F de la fonction racine carrée telle que $F(1) = 1$.

On obtient

$$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{1}{3}.$$

D) Intégrale et primitive

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$.

La fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est une primitive de f sur I .

C'est l'**unique primitive** de f qui s'annule en a .

Conséquence

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Remarque

Pour démontrer rigoureusement ce théorème, nous avons besoin de la relation de Chasles (qui sera étudiée plus loin), ainsi que de la propriété de comparaison des intégrales. La démarche la plus naturelle consisterait à établir d'abord la relation de Chasles de manière géométrique, puis à démontrer la propriété de comparaison à partir de l'interprétation de l'intégrale en termes d'aire, avant de l'étendre aux fonctions de signe quelconque. C'est ce que nous ferons en classe (pour le plaisir!).

E) Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a, b \in I$.

Si F est une primitive quelconque de f sur I , alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

On note également

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

Exemple

Calculons

$$I = \int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

Une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= -\cos \pi + \cos 0 \\ &= 1 + 1. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{I = 2}.$$

Exemple

Calculons

$$I = \int_1^e \frac{1}{x} \, dx.$$

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto \ln x$.

Donc

$$I = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = \boxed{1}.$$

IV) Propriétés de l'intégrale

A) Propriétés algébriques

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tout $a \in I$,

$$\boxed{\int_a^a f(t) \, dt = 0}.$$

Pour tous $a, b \in I$,

$$\boxed{\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt}.$$

B) Relation de Chasles

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Pour tous $a, b, c \in I$,

$$\boxed{\int_a^c f(t) \, dt + \int_c^b f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt}.$$

C) Linéarité

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , soient $a, b \in I$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Alors

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t)) \, dt = \alpha \int_a^b f(t) \, dt + \beta \int_a^b g(t) \, dt.$$

Exemple

Calculer

$$\int_0^1 (5e^{2x} + 3xe^{x^2}) \, dx.$$

D) Intégrales et inégalités

Propriétés

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$, avec $a \leq b$.

Positivité :

Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) \, dt \geq 0.$$

Comparaison :

Si

$$f(x) \leq g(x)$$

pour tout $x \in [a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt.$$

E) Encadrement d'une intégrale (inégalité de la moyenne)

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, avec $a \leq b$.

Si, pour tout $x \in [a; b]$, il existe deux réels m et M tels que :

$$m \leq f(x) \leq M,$$

alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a).$$

Propriété

Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, avec $a \leq b$, et soit $M \geq 0$. Si, pour tout $x \in [a; b]$,

$$|f(x)| \leq M,$$

alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq M(b - a).$$

Exercice

On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt.$$

Sans calculer explicitement I_n :

1. Comparer I_{n+1} et I_n .
2. En déduire le sens de variation de la suite (I_n) .
3. Montrer que

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

4. En déduire la limite de la suite (I_n) .

V) Calcul d'aires

A) Aire située sous une courbe

Lorsque f est continue et positive sur $[a; b]$, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$, entre les droites $x = a$ et $x = b$, est

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

B) Aire comprise entre deux courbes

Propriété

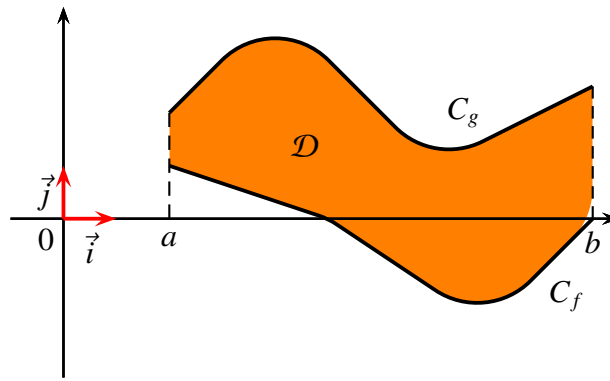
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$.

Si

$$f(x) \leq g(x)$$

pour tout $x \in [a; b]$, alors l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$



C) Cas où les courbes se coupent

Lorsque les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent sur $[a; b]$, on décompose l'intervalle aux abscisses de leurs points d'intersection.

Plus généralement, l'aire comprise entre les deux courbes est

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Exemple

Déterminer l'aire du domaine compris entre les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus et les droites d'équations

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \pi.$$

Il faudra commencer par déterminer l'abscisse du point d'intersection des deux courbes sur $[0; \pi]$.

VI) Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Fonction primitive F	Intervalle
$x \mapsto a, a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ax + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x + K$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x^n} = x^{-n}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$x \mapsto \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + K = \frac{1}{(-n+1)x^{n-1}} + K$	$] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + K$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha > 0$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	$]0, +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto e^{ax+b}$ avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b} + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto -\cos x + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(ax+b)$ avec $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + K$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan x + K$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Si la primitive cherchée n'est pas dans le tableau précédent, on pourra utiliser le tableau suivant, où u désigne une fonction dérivable sur un intervalle.

Fonction	Fonction primitive	Intervalle
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + K$	intervalle contenu dans D_u
$\frac{u'}{u^n} = u'u^{-n}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$	$\frac{u^{-n+1}}{-n+1} + K = \frac{1}{(-n+1)u^{n-1}} + K$	intervalle contenu dans $D_u \cap \{x \text{ tq } u(x) \neq 0\}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + K$	intervalle contenu dans $D_u \cap \{x \text{ tq } u(x) > 0\}$
$u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^{++}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$	intervalle contenu dans $D_u \cap \{x \text{ tq } u(x) > 0\}$
$u'e^u$	$e^u + K$	intervalle contenu dans D_u
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + K$	intervalle contenu dans $D_u \cap \{x \text{ tq } u(x) \neq 0\}$

Remarque

Ces formules sont valables sur tout intervalle sur lequel les expressions considérées sont définies.
En particulier, pour $\frac{u'}{u}$, la fonction u ne doit pas s'annuler sur l'intervalle considéré.

VII) Intégration par parties

De même que généralement $(u \times v)' \neq u' \times v'$ on a : $\int_a^b f(x) \times g(x) dx \neq \int_a^b f(x) dx \times \int_a^b g(x) dx$

Dans certains cas la méthode dite **d'intégration par parties** permet de calculer des intégrales de produits de fonctions.

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ de dérivées u' et v' elles-mêmes continues. Alors :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$$

Exemple

Calculer $I = \int_0^1 x e^x dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin x dx$.

VIII) Intégration par changement de variable

Exemple

$$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$$

Posons $t = e^x$. Alors $\frac{dt}{dx} = e^x$ donc $dt = e^x dx$. De plus, $e^0 = 1$ et $e^1 = e$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx &= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} \times e^x dx \\ &= \int_1^e \frac{t}{t + 1} dt \\ &= \int_1^e \left(\frac{t + 1}{t + 1} - \frac{1}{t + 1} \right) dt \\ &= \int_1^e 1 dt + \int_1^e \frac{1}{t + 1} dt \\ &= [t]_1^e + [\ln(|t + 1|)]_1^e \\ &= e - 1 + \ln(e + 1) - \ln 2 \end{aligned}$$

Exercice

$$J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$$