

Puissances

I) Rappels

Définition

Soit a un nombre réel et n un nombre entier strictement positif. a^n est le produit de n facteurs tous égaux à a , c'est-à-dire : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$

a s'appelle **la base**.

n s'appelle **l'exposant**.

Les années précédentes, les propriétés suivantes ont ensuite été apprises :

Propriétés

a et b sont des nombres réels, $b \neq 0$ et m et n sont des entiers **naturels**.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \text{ ou encore } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$(a \div b)^m = a^m \div b^m, \text{ ou encore } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Exercice

Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$10^7 \times 10^4$$

$$4^2 \times 4^3$$

$$2^1 \times 2^0$$

$$4^5 \div 4^3$$

$$5^{10} \div 5^0$$

$$\frac{7^2}{7^1}$$

$$(2^5)^3$$

$$(10 \times 3)^4$$

$$\frac{10^2}{5^2}$$

II) Puissances négatives

Définition

Si a est un nombre réel **non nul** et m un entier naturel, alors $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
Par convention, si $a \neq 0$, alors $a^0 = 1$.

Exemples

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0,00001$$

À partir de cette définition, on peut généraliser les propriétés vues précédemment :

Propriétés

a et b sont des nombres réels non nuls, et m et n sont des entiers **relatifs**.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}, \text{ ou encore } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$(a \div b)^m = a^m \div b^m, \text{ ou encore } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Exemples

$$(10^{-1})^2 = 10^{-1 \times 2} = 10^{-2} = 0,01$$

$$\frac{10^{-3}}{10^{-8}} = 10^{-3-(-8)} = 10^{-3+8} = 10^5 = 100\,000$$

$$\frac{10^{-5} \times 10^2}{(10^2)^{-3}} = \frac{10^{-5+2}}{10^{2 \times (-3)}} = \frac{10^{-3}}{10^{-6}} = 10^{-3-(-6)} = 10^{-3+6} = 10^3 = 1\,000$$

Exercices

Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

$$10^{-7} \times 10^4$$

$$4^2 \div 4^{-3}$$

$$7^1 \times 7^0 \times 7^{-6} \times 7^4 \times 7^{-5}$$

$$\frac{10^{-7}}{10^4}$$

$$11^{-2} \div 11^{-4}$$

$$10^{-0}$$

$$\frac{10^{-7} \times 10^{12}}{10^4}$$

$$\frac{11^{-4} \div 11^2}{11^6}$$

$$\left((10^{-2})^3\right)^{-3}$$