

Les nombres réels

I) Rappels sur les nombres entiers

A) Définitions et notations

Définition

Un nombre **entier naturel** est un nombre entier positif ou nul.
L'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.

Définition

Un nombre **entier relatif** est un nombre entier qui peut être positif, négatif ou nul.
L'ensemble des entiers relatifs se note $\mathbb{Z}$.

Notation

- Un ensemble d'éléments peut parfois s'écrire sous forme d'une liste entre accolades.
- $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$
- L'ensemble des nombres pairs compris entre 1 et 11 peut se noter $\{2; 4; 6; 8; 10\}$
- 4 est un élément de $\mathbb{N}$. On note : $4 \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des entiers strictement positifs se note $\mathbb{N}^*$.
- $\mathbb{Z}^*$ désigne l'ensemble des entiers relatifs privé de 0. On note aussi $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Exemples

$$5 \in \mathbb{N} \quad 5 \in \mathbb{Z} \quad -12 \notin \mathbb{N} \quad -12 \in \mathbb{Z} \quad 3, 5 \notin \mathbb{Z}$$

Propriété

Tout élément de $\mathbb{N}$ est aussi un élément de $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{N}$ est **inclus** dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Exemple

Considérons les ensembles suivants :
 $A = \{-6; -2; 0; 1; 28; 33; 34\}$ et $B = \{0; 1; 28; 34\}$.

$$A \not\subset \mathbb{N} \quad A \subset \mathbb{Z} \quad -6 \in A \quad B \subset \mathbb{N} \quad B \subset \mathbb{Z} \quad B \subset A \quad B \not\subset \mathbb{N}^*$$

$$A \setminus B = \{-6; -2; 33\}$$

Notation

L'ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle **ensemble vide** et se note $\emptyset$.
Avec les notations précédentes :

$$B \setminus A = \emptyset$$

B) Multiples et diviseurs

Définition

Soient a et b deux entiers. On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$.
On dit alors que b est un **diviseur** de a .

Exemples

- 27 est un multiple de 9 car $27 = 9 \times 3$
- 35 est un multiple de 7 car $35 = 7 \times 5$
- 32 n'est pas un multiple de 6. En effet, $6 \times 5 = 30$ et $6 \times 6 = 36$.

Propriété

La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a .

Méthode

Pour signifier qu'un nombre a est un multiple de 7 (par exemple), on dit qu'il existe un entier p (par exemple) tel que $a = 7p$.

Exercice

Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est nécessairement un multiple de 3.

C) Nombres pairs et impairs

Définition

Un nombre entier est **pair** si c'est un multiple de 2. Un nombre entier est **impair** s'il n'est pas pair.

Remarque

Dans le cadre d'une démonstration, si l'on veut dire qu'un nombre a est pair, on dit qu'il existe un nombre entier k tel que $a = 2k$. Si l'on veut dire que a est impair, on dit qu'il existe un nombre entier k tel que $a = 2k + 1$.

Propriété

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.
- Le carré d'un nombre pair est un nombre pair.
- Le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Exercice

1. Démontrer ces propriétés.
2. Montrer que le carré d'un nombre pair est nécessairement un multiple de 4.

D) Nombres premiers

Définition

Un nombre entier positif est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Remarques

- Par définition, 1 n'est pas premier.
- Les premiers nombres premiers sont 2;3;5;7;11;13;17;19;23;29;31 ...

Propriété

Tout nombre entier au moins égal à 2 se décompose de manière unique comme produit de facteurs premiers.

Exemples

$$38 = 2 \times 19$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

$$17 = 17$$

Propriété

Un entier supérieur ou égal à 2 est premier s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à sa racine carrée.

Exercice

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier.

127

8 312

119

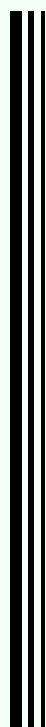
2 341

7 311

E) PGCD – PPCM

Définition

On note **PGCD** de deux nombres entiers leur **plus grand commun diviseur** positif.

Méthode

Pour déterminer le PGCD des nombres 18 et 30 (par exemple), on peut utiliser deux méthodes.

— **Méthode 1 :**

Notons D_{18} et D_{30} les ensembles des diviseurs positifs de 18 et de 30.

$$D_{18} = \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\} \quad D_{30} = \{1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30\}$$

Les diviseurs communs positifs de 18 et 30 forment l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$.

Le **Plus Grand Commun Diviseur** de 18 et 30 est donc 6. On note : $\text{PGCD}(18; 30) = 6$.

— **Méthode 2 :**

On écrit les décompositions en facteurs premiers de 18 et de 30.

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

On conserve les facteurs premiers communs avec le plus petit exposant.

$$\text{PGCD}(18; 30) = 2 \times 3 = 6$$

Définition

On note **PPCM** de deux nombres entiers leur **plus petit commun multiple** strictement positif.

Méthode

Pour déterminer le PPCM des nombres 30 et 45 (par exemple), on peut utiliser deux méthodes.

— **Méthode 1 :**

Notons M_{30} et M_{45} les ensembles des multiples strictement positifs de 30 et de 45.

$$M_{30} = \{30; 60; 90; 120; 150; 180; \dots\} \quad M_{45} = \{45; 90; 135; 180; \dots\}$$

Les multiples communs strictement positifs de 30 et 45 forment l'ensemble $\{90; 180; \dots\}$.

Le **Plus Petit Commun Multiple** de 30 et 45 est donc 90. On note : $\text{PPCM}(30; 45) = 90$.

— **Méthode 2 :**

On écrit les décompositions en facteurs premiers de 30 et de 45.

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

On prend tous les facteurs premiers apparaissant dans au moins une des deux décompositions, avec le plus grand exposant.

$$\text{PPCM}(30; 45) = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

Propriété

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs.

$$\text{PGCD}(a; 1) = 1 \quad \text{PPCM}(a; 1) = a \quad \text{PGCD}(a; a) = a \quad \text{PPCM}(a; a) = a$$

$$a \times b = \text{PGCD}(a; b) \times \text{PPCM}(a; b)$$

Définition

Soient a et b deux nombres entiers strictement positifs.

On dit que a et b sont **premiers entre eux** si $\text{PGCD}(a; b) = 1$.

Remarque

Si a et b sont premiers entre eux alors $\text{PPCM}(a; b) = a \times b$.

F) Sommes

Notation

La somme $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 1024$ peut se noter de manière plus rapide

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k$$

Σ est une lettre grecque qui se prononce « sigma ». Elle correspond à la lettre S de notre alphabet.

Exercice

Calculer :

$$a) \quad S_1 = \sum_{k=0}^7 (2k + 1)$$

$$b) \quad S_2 = \sum_{n=2}^{10} (-2)^n$$

G) Différences

Notation

La variation d'une quantité entre une valeur initiale V_i et une valeur finale V_f peut se noter

$$\Delta V = V_f - V_i.$$

Δ est une lettre grecque qui se prononce « delta ». Elle est souvent utilisée en mathématiques pour désigner une variation ou un écart.

Exercice

Calculer la variation ΔV lorsque :

- a) $V_i = 8$ et $V_f = 15$
- b) $V_i = 7$ et $V_f = -3$

II) Nombres réels

A) Ensembles de nombres

Définition

Un nombre est **réel** s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée (appelée la droite numérique).

L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

Propriété

Un nombre est **rationnel** si on peut l'écrire sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples

- $1,75 \in \mathbb{Q}$ car $1,75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4} = \dots$
- $0,333\,333\,\dots \in \mathbb{Q}$ car on peut l'écrire $\frac{1}{3}$.
- $8 \in \mathbb{Q}$ car $8 = \frac{16}{2}$.

Remarques

- Tout nombre rationnel est un nombre réel. On dit que $\mathbb{Q}$ est **inclus dans** $\mathbb{R}$ et on note $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- À savoir : le nombre π n'est pas rationnel. On dit qu'il est **irrationnel**. On peut noter $\pi \notin \mathbb{Q}$ ou encore $\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ privé de $\mathbb{Q}$).
- Il existe au moins un nombre irrationnel entre n'importe quelle paire de nombres rationnels distincts (on pourra le démontrer).
- L'écriture décimale d'un nombre rationnel est finie ou périodique à partir d'un certain rang.
- Un nombre réel est soit rationnel soit irrationnel.

Exercices

1. Démontrer que la somme et le produit de deux nombres rationnels sont rationnels.
2. Démontrer que la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est irrationnelle.
3. Démontrer que le produit d'un irrationnel et d'un rationnel non nul est irrationnel.

Définition

Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire comme une fraction décimale, c'est-à-dire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Remarques

— Tout nombre décimal est un nombre rationnel, donc réel. On a donc :

$$\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

— Tout nombre décimal possède une écriture décimale finie.

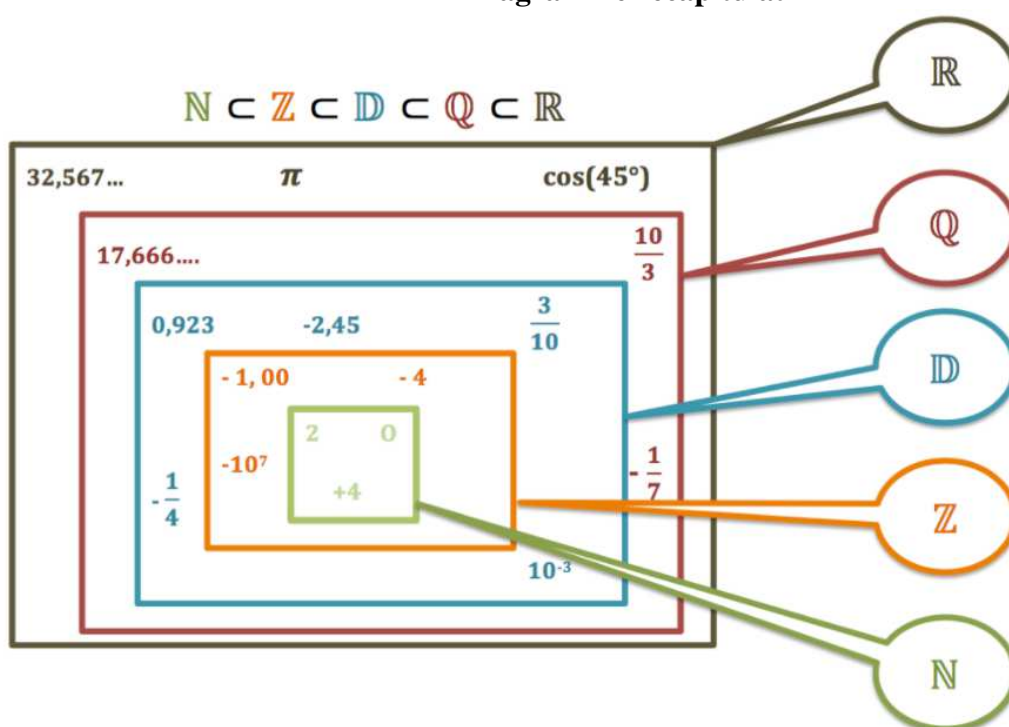
— On a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Exercice

||| Démontrer que la somme et le produit de deux nombres décimaux sont décimaux.

Diagramme récapitulatif



Attention

L'ensemble des nombres décimaux (par exemple) est constitué sur ce diagramme de tous les nombres que l'on pourrait écrire en bleu, en orange ou en vert.

L'ensemble des nombres irrationnels est constitué, sur le diagramme, des nombres écrits en noir uniquement. Ces nombres n'appartiennent à aucun des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

L'ensemble des nombres rationnels non décimaux (nombres en rouge) n'a pas de nom particulier mais on peut le noter $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D}$.

Exercice

Donner la nature des nombres suivants, c'est-à-dire déterminer le plus petit ensemble parmi ceux vus dans ce cours auquel chacun appartient. Justifier.

$\sqrt{49}$

$\frac{162,5}{4}$

$\frac{128}{8}$

$\sqrt{42,25}$

$7,151\,515\,151\,515\,151\dots$

Propriété

- Le nombre $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.
- Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque

π et $\sqrt{2}$ sont tous deux irrationnels (voir chapitre suivant pour $\sqrt{2}$). Mais il existe une différence notable entre ces deux nombres. En effet, $\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas dès lors qu'une unité de longueur est fixée; on peut donc le construire exactement sur la droite numérique. Ce n'est pas le cas de π .

Exercice

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes et donner l'ensemble des solutions.

$10x + 3 = 6x - 11$

$(3x + 4)(7x - 56) = 0$

$(x^2 - 2)(x + 27) = 0$

2. Résoudre ces équations dans $\mathbb{Q}$, puis dans $\mathbb{D}$ et dans $\mathbb{Z}$.