

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes en faisant bien apparaître les étapes de calcul.

$$\begin{aligned} A &= (54 - 14) \times (13 - 20) & B &= 14 - (-5) \times (-4) & C &= -7 \times (39 - (30 + 15)) \\ D &= 34 - 4 \times (8 - 10) & E &= \frac{20 - (-4) \times 2}{-3 \times (-2) + 1} & F &= (1024 - 4 \times 6) \div (91 + 63 \div 7) \times 4 \end{aligned}$$

Exercice 2

Effectuer les calculs suivants et simplifier au maximum.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{-8} + \frac{5}{4} + \frac{-7}{6} & B &= 1 + \frac{-15}{7} + \frac{-3}{-5} & C &= -2 + \frac{5}{6} - \frac{23}{10} - \frac{3}{-5} & D &= \frac{7}{8} - \frac{-5}{3} \\ E &= \frac{-8}{15} + \frac{-7}{6} & F &= \frac{2}{3} \times \frac{5}{-2} & G &= -\frac{9}{4} \times \frac{8}{3} & H &= \frac{-63}{25} \times \frac{40}{-81} \\ I &= \frac{-12}{-7} \times \frac{-21}{8} & J &= -\frac{18}{-5} \times \frac{20}{-16} \times \frac{-4}{-5} & K &= \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \times \frac{16}{9} & L &= \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \\ M &= \frac{3}{10} \div \frac{-9}{8} & N &= \frac{5}{12} + \frac{7}{12} \div \frac{28}{33} & P &= \frac{\frac{2}{3} + \frac{-7}{4}}{\frac{52}{15}} & R &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{10}}{\frac{17}{34} + \frac{51}{68} + \frac{153}{170}} \end{aligned}$$

Exercice 3

Compléter le carré magique (+).

$\frac{20}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{7}$
$\frac{15}{14}$		

Exercice 4

Calculatrice autorisée

Pour tout entier naturel non nul n , on note $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

Par exemple, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Calculer :

$$S = \frac{15!}{37!} \times \frac{38!}{16!}$$

Exercice 5

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier.

417

1 147

947

12 478

1

91

Exercice 6

Le produit de trois nombres entiers **distincts** est égal à -12 .

Quels peuvent être ces trois nombres ? Donner toutes les possibilités.

Exercice 7

1. Donner la décomposition en facteurs premiers des nombres suivants. *Détailler la recherche.*

$$A = 637$$

$$B = 4\,200$$

$$C = 528$$

$$D = 2^3 \times 3^5 \times 7^2 \times 60$$

$$E = 4^2 \times 15^7 \times 18$$

$$F = 1\,763$$

2. Déterminer alors les nombres suivants. *Détail du calcul puis éventuellement calculatrice.*

$$R = \text{PGCD}(B; C)$$

$$S = \text{PPCM}(B; C)$$

$$T = \text{PGCD}(A; C)$$

$$U = \text{PPCM}(A; C)$$

$$V = \text{PGCD}(B; D)$$

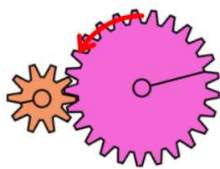
$$W = \text{PPCM}(D; E)$$

Exercice 8

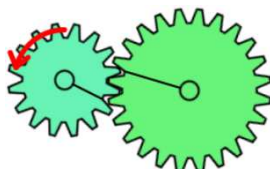
Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 540 billes et 378 calots. Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.

- Combien de lots identiques pourra-t-il faire ?
- Quelle sera la composition de chacun de ces lots ?

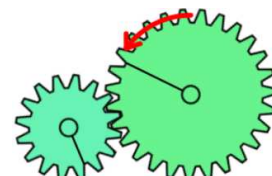
Exercice 9



Engrenage A

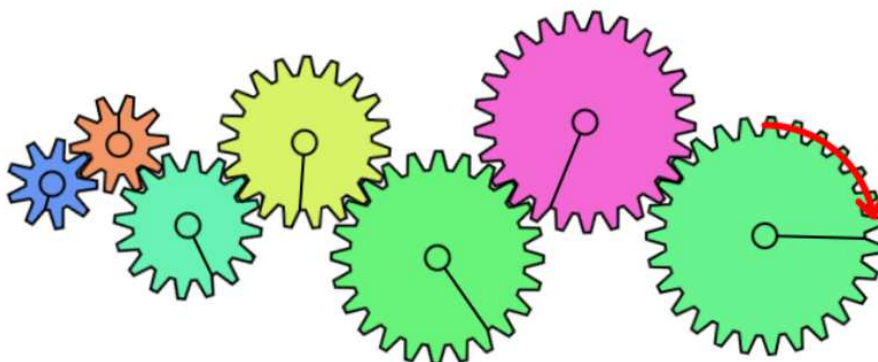


Engrenage B



Engrenage C

1. L'engrenage *A* est constitué de deux roues de 10 dents et 25 dents. Combien de tours doit faire la roue de 25 dents pour que l'engrenage retrouve sa position initiale pour la première fois ?
2. L'engrenage *B* est constitué de deux roues de 16 dents et 24 dents. Combien de tours doit faire la roue de 16 dents pour que l'engrenage retrouve sa position initiale pour la première fois ?
3. L'engrenage *C* est constitué de deux roues de 16 dents et 27 dents. Combien de tours doit faire la roue de 27 dents pour que l'engrenage retrouve sa position initiale pour la première fois ?
4. L'engrenage *D* est constitué de sept roues de 9 ; 10 ; 16 ; 19 ; 24 ; 25 et 27 dents (de gauche à droite).
 - a) Dans quel sens va tourner la roue de 9 dents si celle de 27 dents tourne dans le sens horaire ?
 - b) La roue de 27 dents met 4 secondes pour faire un tour. En combien de temps l'engrenage retrouvera-t-il sa position initiale pour la première fois ?
 - c) Combien de tours auront effectués les roues de 9 et 27 dents ?



Engrenage D

Exercice 10

Écrire les sommes suivantes avec la notation $\sum$.

$$A = 1 + 2 + 3 + \cdots + 99 \quad B = 1 + 4 + 9 + 16 + \cdots + 400 \quad C = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{17}}$$

$$D = 7 + 11 + 15 + \cdots + 51 \quad E = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 23 \times 24 \quad F = 1 \times 2 + 3 \times 4 + \cdots + 23 \times 24$$

Exercice 11

Simplifier pour n'avoir plus qu'un seul symbole $\sum$ pour chaque somme.

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{134} 5^k - \sum_{k=0}^{23} 5^k & B &= \sum_{k=0}^{20} (2k+1) + \sum_{k=0}^{20} (4k-10) & C &= \sum_{k=0}^{21} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=22}^{43} \frac{1}{k+1} \\ D &= \sum_{k=0}^{54} k^2 + \sum_{k=1}^{54} k^2 & E &= \sum_{k=7}^{23} (k+1) + \sum_{n=7}^{23} (n-1) - 46 & F &= \sum_{k=2}^{323} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{321} \frac{1}{k+3} \end{aligned}$$

Exercice 12 – Nombres de Mersenne

Les nombres de Mersenne sont les nombres

$$M_n = 2^n - 1 \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Calculer les dix premiers nombres de Mersenne.
2. Conjecturer une condition nécessaire sur n pour que M_n soit premier.
3. Démontrer que si n est pair et strictement supérieur à 2, alors M_n n'est pas premier.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$(a-1) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^k = a^n - 1.$$

5. Démontrer alors que si n n'est pas premier, alors M_n ne l'est pas non plus.
6. Calculer M_{11} . Conclure.

Exercice 13

On considère les ensembles :

$$A = \{-12; -5; 0; 3; 8; 15; 24\} \quad \text{et} \quad B = \{0; 3; 8; 24\}.$$

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

$$\begin{array}{llll} -5 \dots A & 7 \dots A & B \dots A & A \dots \mathbb{Z} \\ B \dots \mathbb{N} & A \dots \mathbb{N} & \{3; 8\} \dots B & \{-5; 15\} \dots \mathbb{N} \end{array}$$

Déterminer ensuite les ensembles $A \setminus B$ et $B \setminus A$.

Exercice 14

1. Démontrer que la somme de cinq entiers consécutifs est toujours un multiple de 5.
2. Démontrer que la somme de trois multiples consécutifs de 4 est toujours un multiple de 12.
3. Soit n un entier. Démontrer que $n(n+1)$ est toujours un nombre pair.
4. Soit n un entier. Démontrer que $n(n+1)(n+2)$ est toujours un multiple de 6.

Exercice 15

On considère un entier n .

1. Démontrer que si n est impair, alors n^2 est impair.
2. Démontrer que si n est impair, alors $n^2 - 1$ est un multiple de 8.
3. Déterminer la parité de $n(n + 1) + 7$.
4. Déterminer la parité de

$$(2n + 1)^2 + (2n + 3)^2.$$

Exercice 16

Les nombres suivants sont-ils premiers ? Justifier votre réponse.

$$137 \quad 221 \quad 257 \quad 323 \quad 391 \quad 997$$

Pour chaque nombre qui n'est pas premier, donner sa décomposition en facteurs premiers.

Exercice 17

Écrire les sommes suivantes à l'aide du symbole $\sum$.

$$A = 3 + 6 + 9 + \cdots + 60$$

$$B = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$$

$$C = 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots + 25^2$$

$$D = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{30}$$

$$E = 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \cdots + 49 \times 50$$

$$F = 5 + 9 + 13 + 17 + \cdots + 101$$

Exercice 18

Développer les sommes suivantes puis les calculer.

$$A = \sum_{k=1}^8 (3k - 2)$$

$$B = \sum_{k=0}^6 2^k$$

$$C = \sum_{k=1}^5 k^2$$

$$D = \sum_{k=3}^9 (2k + 1)$$

$$E = \sum_{k=1}^6 (-1)^k$$

$$F = \sum_{k=0}^4 (10 - 3k)$$

Exercice 19

Pour chacune des situations suivantes, calculer la variation $\Delta V = V_f - V_i$, puis interpréter le signe du résultat.

1. Une température passe de -7°C à 4°C .
2. Le prix d'une action passe de 83 € à 71 €.
3. L'altitude d'un plongeur passe de -18 m à -5 m.
4. Une population passe de 12 500 habitants à 13 940 habitants.
5. La température d'un congélateur passe de -12°C à -21°C .

Dans chaque cas, préciser si la quantité a augmenté ou diminué et de combien.

Exercice 20

Pour chacun des nombres suivants, déterminer le **plus petit ensemble** parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ auquel il appartient. Justifier.

$$A = -17$$

$$B = \frac{42}{7}$$

$$C = \frac{7}{8}$$

$$D = \frac{2}{3}$$

$$E = \sqrt{81}$$

$$F = -\sqrt{49}$$

$$G = \sqrt{2}$$

$$H = 4,125$$

$$I = 0,12121212\dots$$

$$J = \pi$$

$$K = \frac{-15}{6}$$

$$L = \sqrt{0,25}$$

Exercice 21

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

$$3 \dots \mathbb{Z}$$

$$-7 \dots \mathbb{Z}$$

$$8 \dots \mathbb{N}$$

$$-13 \dots \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z} \dots \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \dots \mathbb{Z}$$

$$9,5 \dots \mathbb{Z}$$

$$-0 \dots \mathbb{N}$$

$$\{-3; 9; 127\} \dots \mathbb{Z}$$

$$\{-25; 7; -2\} \dots \mathbb{N}$$

$$-3,5 \dots \left\{-10; -\frac{30}{4}; -\frac{7}{2}; 4\right\}$$

$$\{-6; 2\} \dots \{-8; -6; -4; 0; 2; 8\}$$

$$\sqrt{8} \dots \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \dots \mathbb{D}$$

$$9,5 \dots \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{12,25} \dots \mathbb{D}$$

$$\frac{123}{35} \dots \mathbb{Q}$$

$$\left\{\frac{17}{8}\right\} \dots \mathbb{D}$$

$$\sqrt{49} \dots \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{D} \dots \mathbb{R}$$

Exercice 22

Donner la nature des nombres suivants (*le plus petit ensemble du cours auquel ils appartiennent*).

$$\frac{2}{5}$$

$$\sqrt{25}$$

$$2,74$$

$$\frac{4}{3}$$

$$\pi$$

$$-\frac{35}{7}$$

$$\sqrt{24}$$

$$\frac{31}{1,2}$$

$$\frac{\pi}{2\pi}$$

$$-2,333\,333\dots$$

Exercice 23

Est-il possible qu'un carré dont la longueur du côté, exprimée en cm, soit un nombre irrationnel ait une aire, exprimée en cm^2 , égale à un nombre rationnel? Justifier.

Exercice 24

1. Montrer que la somme de deux nombres rationnels est rationnelle.
2. Montrer que la somme de deux nombres décimaux est décimale.
3. La somme de deux nombres irrationnels est-elle nécessairement irrationnelle ? Justifier.
4. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

Exercice 25

1. Donner les écritures décimales des nombres suivants.

$$\frac{7}{9}$$

$$\frac{4}{9}$$

$$\frac{38}{99}$$

$$\frac{312}{999}$$

$$\frac{7}{99}$$

$$\frac{29}{33}$$

Conjecturer une méthode permettant d'obtenir l'écriture décimale périodique de certaines fractions à partir de leur numérateur et de leur dénominateur. Expliquer le cas de la dernière fraction.

2. Écrire alors chacun des nombres suivants sous forme de fraction irréductible.

$$0,222\,222\,222\dots$$

$$0,454\,545\,454\dots$$

$$0,237\,523\,752\,375\dots$$

$$17,444\,444\,444\dots$$

$$8,382\,525\,252\dots$$

$$34,567\,030\,303\,030\dots$$

3. Démontrons la conjecture sur un exemple. Prenons le nombre $a = 0,343\,434\,343\,434\dots$.
 - a) Calculer $100a - a$.
 - b) Conclure.

Exercice 26

Démontrer que

$$0,999\,999\,999\dots = 1.$$