

Limites et asymptotes

I) Rappels

Définition

Soit f une fonction réelle. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta : y = \ell$ comme **asymptote horizontale** en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) lorsque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad \left(\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell \right).$$

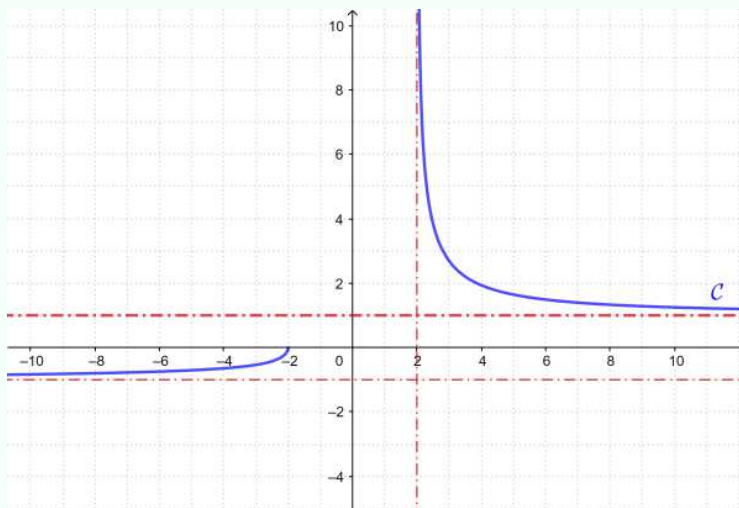
- $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta : x = a$ comme **asymptote verticale** lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty,$$

ou lorsque

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple



La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessus représente une fonction f définie sur

$$]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[.$$

On admet que :

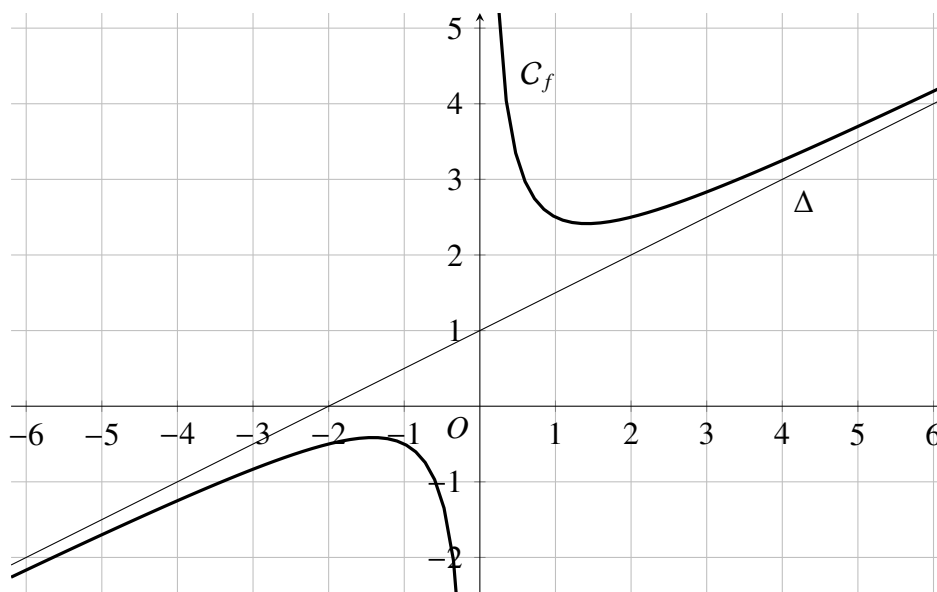
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

Alors, $\mathcal{C}$ admet les droites $d_1 : y = -1$ et $d_2 : y = 1$ comme asymptotes horizontales (en respectivement $-\infty$ et $+\infty$) et la droite $d_3 : x = 2$ comme asymptote verticale.

II) Asymptotes obliques

Sur la figure ci-dessous, il semble que Δ soit une **asymptote oblique** de $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Il semble aussi que la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe (Oy) , soit une asymptote verticale de $\mathcal{C}_f$.



Définition

Soient f une fonction telle que $D_f \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et a et b deux réels (a non nul).

La droite

$$\Delta : y = ax + b$$

est dite **asymptote oblique** de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$ et/ou de $+\infty$ si :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \quad \text{et/ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Exercice

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{x}$$

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Dresser un tableau de variations complet de f .
3. Montrer que

$$\Delta : y = \frac{1}{2}x + 1$$

est une asymptote oblique de $\mathcal{C}_f$ aux voisinages de $-\infty$ et $+\infty$.

III) Méthodes

A) Cas 1 : l'équation de l'asymptote oblique est donnée dans l'énoncé

Exemple

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 + x - 5}{x + 2} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

Montrons que la droite

$$d : y = 2x - 3$$

est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

On étudie la différence entre $f(x)$ et $2x - 3$:

$$\begin{aligned} f(x) - (2x - 3) &= \frac{2x^2 + x - 5}{x + 2} - (2x - 3) \\ &= \frac{2x^2 + x - 5 - (2x - 3)(x + 2)}{x + 2} \\ &= \frac{2x^2 + x - 5 - (2x^2 + x - 6)}{x + 2} \\ &= \frac{1}{x + 2}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (2x - 3)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = 0$

Ainsi, la droite

$$\boxed{d : y = 2x - 3}$$

est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

B) Cas 2 : l'équation de l'asymptote oblique est évidente

Exemple

$$g : x \mapsto 5x - 1 - \frac{7}{x - 3} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Déterminons les éventuelles asymptotes obliques à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

On remarque que

$$g(x) = (5x - 1) - \frac{7}{x - 3}.$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{7}{x - 3} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{x - 3} \right) = 0.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (5x - 1)] = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (5x - 1)] = 0$.

Donc la droite

$$\boxed{d : y = 5x - 1}$$

est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

C) Cas 3 : l'équation de l'asymptote oblique n'est ni donnée ni évidente

Exemple



$$h : x \mapsto \frac{5x^2 + 7x - 5}{x + 1}$$

$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Déterminer les éventuelles asymptotes obliques à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

Méthode 1 : technique systématique

On cherche deux réels a et b tels que la droite

$$y = ax + b$$

soit une asymptote oblique.

On commence par chercher a :

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 + 7x - 5}{x(x + 1)} \\ &= 5. \end{aligned}$$

On cherche ensuite b :

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [h(x) - 5x] \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{5x^2 + 7x - 5}{x + 1} - 5x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 5}{x + 1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

La droite susceptible d'être asymptote est donc

$$d : y = 5x + 2.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} h(x) - (5x + 2) &= \frac{5x^2 + 7x - 5 - (5x + 2)(x + 1)}{x + 1} \\ &= -\frac{7}{x + 1}. \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{7}{x + 1} \right) = 0,$$

on conclut que

$$\boxed{d : y = 5x + 2}$$

est une asymptote oblique en $-\infty$ et en $+\infty$.

Méthode 2 : technique intuitive

Ne fonctionne qu'avec des fonctions rationnelles.

On cherche à factoriser le numérateur par le dénominateur (quitte à laisser un réel de côté). Après quelques essais, on trouve :

$$5x^2 + 7x - 5 = (x + 1)(5x + 2) - 7.$$

Donc

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{5x^2 + 7x - 5}{x + 1} \\ &= 5x + 2 - \frac{7}{x + 1}. \end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{7}{x + 1} \right) = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{x + 1} \right) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{d : y = 5x + 2}$$

est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_h$ en $-\infty$ et en $+\infty$.