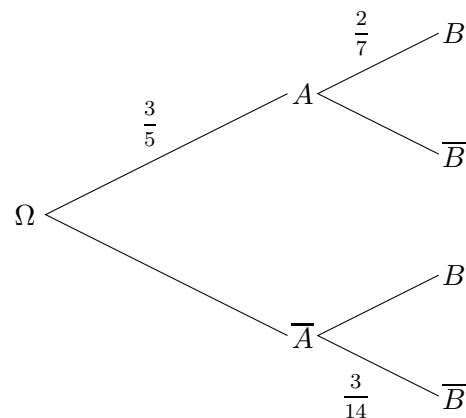


Exercice 1

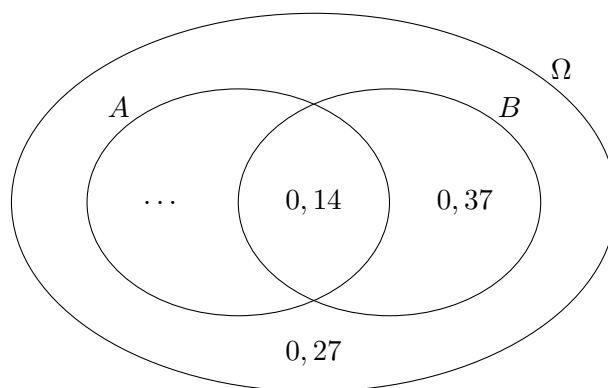
Une expérience aléatoire à deux étapes est modélisée par l'arbre ci-contre. Calculer :



- a) $P(\bar{A})$
- b) $P_A(\bar{B})$
- c) $P(A \cap B)$
- d) $P(A \cup B)$
- e) $P(B)$
- f) $P_{\bar{B}}(A)$

Exercice 2

Une expérience aléatoire à laquelle on lie deux événements A et B est modélisée par le diagramme de Venn (avec probabilités) ci-dessous. Donner ou calculer :



- a) $P(\bar{A})$
- b) $P_A(\bar{B})$
- c) $P(A \cap B)$
- d) $P(A \cup \bar{B})$
- e) $P(B)$
- f) $P_{\bar{B}}(\bar{A})$

Exercice 3

Une population à laquelle on associe deux critères A et B est modélisée par le tableau à double entrée ci-dessous. Donner ou calculer :

- a) $P(\bar{A})$
- b) $P_A(\bar{B})$
- c) $P(A \cap B)$
- d) $P(A \cup B)$
- e) $P(B)$
- f) $P_{\bar{B}}(A)$
- g) $P_A(A \cup B)$
- h) $P_{\bar{B}}(A \cup B)$

	A	\bar{A}	Total
B			
\bar{B}		15	37
Total	41		96

Exercice 4

Un joueur lance un dé équilibré à six faces. S'il obtient un nombre pair, le joueur gagne 30 €, sinon il perd 15 €. On note X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

1. Déterminer l'univers Ω , ainsi que F l'ensemble des valeurs prises par X .
2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer le gain moyen du joueur à ce jeu. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Calculer la variance et l'écart type de X .

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité suivante.

x_i	-12	-8	5	18
$P(X = x_i)$	0,21	0,33	0,25	

1. Compléter la loi de probabilité.
2. Calculer $P(X \leq 0)$.
3. Calculer l'espérance de X .
4. Calculer la variance et l'écart type de X .

Exercice 6

Aurélien se souvient d'un jeu auquel elle jouait plus petite. En jouant une partie, on pouvait y gagner 3 points, 10 points ou 20 points. Elle explique à son frère qu'il y avait « 3 fois plus de chance » de gagner 3 points que d'en gagner 10, et qu'il y avait « 2 fois plus de chance » de gagner 10 points que 20 points.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X .
3. Calculer la variance et l'écart type de X .
4. Si on décide qu'un point vaut 5 €, déterminer l'espérance de gain en euros de ce nouveau jeu, ainsi que la variance et l'écart type.

Exercice 7

On lance un dé à 6 faces. Si on obtient un multiple de 3, on gagne 3 €. Si on obtient un nombre dont le reste dans sa division euclidienne par 3 vaut 1, on perd 1 €. Si on obtient un nombre dont le reste dans sa division euclidienne par 3 vaut 2, on perd 2 €.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain d'une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Le dé est truqué de telle sorte que le 1 sort avec une probabilité égale à 0,2 et les autres faces sortent de manière équiprobable.
Reprendre les questions 1 et 2.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi suivante, avec y un nombre réel.

x_i	-20	-5	5	10	32
$P(X = x_i)$	y	$2y$	$3y$	$4y$	$5y$

- Déterminer la valeur de y pour que ce tableau soit effectivement celui d'une loi de probabilité.
- Calculer $P(X > 0)$.
- Calculer l'espérance de X .
- Calculer la variance et l'écart type de X .

Exercice 9

Dans une station de ski, les skieurs peuvent choisir trois types de forfaits.

- Le forfait A à 20 € : tout le domaine est accessible seulement le matin.
- Le forfait B à 30 € : tout le domaine est accessible seulement l'après-midi.
- Le forfait C à 40 € : tout le domaine est accessible toute la journée.

60 % des skieurs louent du matériel en payant 15 €. Le fait de louer du matériel est indépendant du choix du forfait. 30 % des skieurs choisissent le forfait A , 45 % choisissent le forfait B et le reste choisit le forfait C .

On choisit au hasard un skieur et on note X la variable aléatoire qui associe au skieur le prix payé.

- Construire l'arbre de probabilités associé à cette expérience aléatoire.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer le coût moyen d'une « journée » au ski pour un client de la station.
- Aujourd'hui, 3 500 skieurs sont attendus. Quelle est l'espérance du chiffre d'affaire pour la station ?
- Calculer la variance et l'écart type de X .

Exercice 10

Un casino met en place un jeu se jouant avec un jeu de cartes classique de 52 cartes. Le joueur tire une carte.

- Si cette carte est un As, il gagne 100 €.
- Si c'est un cœur (sauf l'As), il gagne 25 €.
- Sinon, il perd 20 €.

Le joueur lance alors un dé à six faces équilibré. Si le dé indique un nombre pair, tous les gains (positifs ou négatifs) sont multipliés par 2. Sinon les gains ne bougent pas.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain final du joueur.

- Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Déterminer l'espérance de X . Le jeu est-il favorable au joueur ou au casino ?

Exercice 11

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi de probabilité suivante, avec a un réel.

x_i	-15	-6	2	a
$P(X = x_i)$	0,3	0,25	0,15	

- Déterminer la valeur de $P(X = a)$.
- Déterminer la valeur de a pour laquelle l'espérance de X est égale à 10.
- X représente le gain d'un joueur à un jeu. Pour quelles valeurs de a le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 12

Un jeu de casino se déroule de la manière suivante.

- Étape 1 : le joueur tourne une roue séparée en trois secteurs de même aire, le secteur 1 rapporte 10€ et le jeu s'arrête, le secteur 2 rapporte 20€ et le jeu s'arrête, le secteur 3 ne rapporte rien mais permet d'accéder à l'étape 2.
- Étape 2 : le joueur qui a obtenu le secteur 3 lance alors un dé équilibré à six faces. Si le dé indique un chiffre impair, alors le joueur remporte 60€, sinon il ne gagne rien.

On note X la variable aléatoire correspondant au gain du joueur.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance de X . Le jeu est-il favorable au joueur ?
- On demande alors au joueur de payer une somme m pour pouvoir jouer une partie. Déterminer les valeurs de m qui rendent le jeu défavorable au joueur.

Exercice 13

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Kylian marque avec une probabilité de 0,7. Kylian effectue une série de 3 tirs au but. On note :

- M : « Kylian marque un but ».

On suppose que les tirs au but de Kylian sont indépendants. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs.

- Réaliser un arbre de probabilités permettant de décrire toutes les issues possibles.
- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X .

On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15€ avant la série de tirs au but de Kylian ; chaque but marqué par Kylian lui rapporte 6€, et chaque tir manqué par Kylian ne lui rapporte rien.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur.

- Exprimer Y en fonction de X .
- Calculer $E(Y)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 14

On dispose d'un dé équilibré à six faces et de deux urnes U et V contenant des boules blanches ou rouges, indiscernables au toucher. L'urne U contient 40 boules blanches et 60 boules rouges ; l'urne V , 70 boules blanches et 30 boules rouges.

Un jeu consiste à lancer le dé puis tirer une boule dans l'une des urnes. Si on obtient 1 ou 6 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne U . Si on obtient 2, 3, 4 ou 5 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne V .

On considère les événements suivants.

- U : « le tirage s'effectue dans l'urne U » ;
- B : « la boule tirée est blanche ».

Sauf indication contraire, les probabilités seront arrondies au millième.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'événement « la boule tirée est rouge ».
3. On tire une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne U ?
4. Pour jouer, il faut miser 1 €. Le joueur gagne 3 € s'il tire une boule rouge et il ne gagne rien s'il tire une boule blanche. On note G la variable aléatoire donnant le gain du joueur.
 - a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .
 - b) Calculer l'espérance de G . Interpréter ce résultat.

Exercice 15

Une assurance de voiture souhaite créer un nouveau contrat sans franchise. Elle a déjà étudié les statistiques faites sur un très grand nombre de clients et elle a tiré les conclusions suivantes.

- Un client n'a jamais plus d'un accident par an et jamais plus d'une panne par an (il peut avoir les deux).
- La probabilité qu'un client ait une panne dans l'année est de 0,2.
- La probabilité qu'un client ait un accident dans l'année est de 0,1.
- Les événements « avoir une panne » et « avoir un accident » sont indépendants.

On notera A l'événement « avoir un accident » et B l'événement « avoir une panne ».

1. Représenter la situation à l'aide d'un diagramme de Venn.

L'assurance a étudié qu'en moyenne, une « panne » lui coûte 300 € alors qu'un accident lui coûte 1 100 €. L'assurance demande une cotisation de 250 € par client.

Soit X la variable aléatoire représentant le gain effectué par l'assurance grâce à un client.

2. Déterminer la loi de probabilité de X .
3. Calculer l'espérance de X . En déduire si l'assurance est gagnante ou non.
4. L'assurance souhaite gagner en moyenne 100 € par assuré. Proposer une solution à l'assurance.
5. Une autre solution, sans ajouter à la cotisation des assurés, est de rajouter une franchise.

En supposant que la franchise demandée est la même pour une panne et pour un accident, déterminer la valeur de la franchise m que l'assurance doit demander pour que l'espérance soit de 100 €.

Exercice 16

On demande à 4 personnes choisies au hasard si elles aiment les mathématiques. On sait que 60 % des habitants aiment les mathématiques.

X est la variable aléatoire donnant le nombre de personnes qui aiment les mathématiques parmi les 4 interrogées.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants.
 - A : « au moins une personne interrogée parmi les 4 aime les mathématiques »
 - B : « plus de trois personnes interrogées parmi les 4 aiment les mathématiques »
 - C : « au plus une personne interrogée parmi les 4 aime les mathématiques »

Exercice 17

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(12; 0, 8)$$

Calculer :

- | | | | | |
|---------------|------------------|--------------------------|------------------|----------------|
| a) $E(X)$ | b) $P(X = 5)$ | c) $P(X = 9)$ | d) $P(X = 10)$ | e) $P(X = 13)$ |
| f) $P(X < 8)$ | g) $P(X \leq 1)$ | h) $P(8 \leq X \leq 11)$ | i) $P(X \geq 8)$ | j) $P(X = 3)$ |

Exercice 18

On sait que 14 % des arbres d'une forêt sont infestés par un parasite. On choisit au hasard 25 arbres dans cette forêt. On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'arbres infestés par le parasite parmi les 25 arbres.

1. Donner la loi de probabilité de X . Justifier.
2. Calculer $P(X < 3)$.
3. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Exercice 19

À la roulette, la probabilité que la bille tombe sur la couleur rouge est de $\frac{18}{37}$. Un joueur joue 20 fois consécutivement en misant sur le rouge et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de parties gagnées.

1. Donner la loi de probabilité de X . Justifier.
2. Calculer $P(X = 9)$.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins dix fois.
4. Calculer $E(X)$. Interpréter.

Exercice 20

Une population compte 18 % de gauchers. On choisit au hasard 5 personnes dans cette population. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de gauchers parmi ces 5 personnes.

1. Donner la loi de probabilité suivie par X .
2. Calculer $E(X)$. Interpréter.
3. Calculer $P(X \geq 2)$. Arrondir au millième.

Exercice 21

Monsieur Dupont effectue une insémination sur l'ensemble de son troupeau composé de 70 vaches. L'insémination a un taux moyen de réussite de 65 %. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de vaches gestantes (pour lesquelles l'insémination a réussi).

1. Donner la loi de probabilité de X . Justifier.
2. Déterminer le nombre moyen de vaches gestantes pour un tel troupeau.
3. Calculer la probabilité d'avoir 50 vaches gestantes ? Arrondir à 10^{-4} près.

Exercice 22

Une population est composée de 12 % de personnes vegan. Une cantine sert 250 repas à des personnes issues de cette population. Elle prévoit 32 repas vegan.

Quelle est la probabilité que cela ne soit pas suffisant ? Justifier.

Exercice 23

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant si nécessaire à 10^{-4} près.

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes.

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

1. a) Préciser $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\bar{V}}(\bar{T})$.
 b) Modéliser la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
 c) Calculer la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. Calculer la probabilité que le test soit positif.
3. a) Justifier par un calcul la phrase suivante : « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
 b) Déterminer la probabilité qu'une personne au test négatif ne soit pas contaminée par le virus.

Partie B

On choisit 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants. On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Exercice 24

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers. Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

- la probabilité de tirer un objet rare est de 7% ;
- si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80% ;
- si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40%.

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- \bar{R} et \bar{E} les évènements contraires des évènements R et E .

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. *Arrondir au millième.*

Partie B

Un joueur remporte 30 défis. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient alors. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par X . Préciser ses paramètres et son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. *Arrondir le résultat au millième.*
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geq k) \geq 0,5$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets lorsqu'un défi est remporté. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7%. Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à 0,95.

Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif.