Dénombrement

I) Généralités sur les ensembles

Définition

-Un **ensemble** est une collection d'objets.
-Les objets d'un ensemble sont appelés les **éléments** de cet ensemble.
-Si un élément x appartient à un ensemble E, on note : $x \in E$
-Si un élément x n'appartient pas à un ensemble E, on note : $x \notin E$
-Lorsqu'un ensemble possède un nombre limité d'éléments, on dit qu'il est **fini** (sinon, on dit qu'il est **infini**).
-Le nombre d'éléments d'un ensemble s'appelle le **cardinal** de cet ensemble.

Remarque

On peut représenter des ensembles grâce à un **diagramme de Venn**.

Exemple 1

On considère l'ensemble :

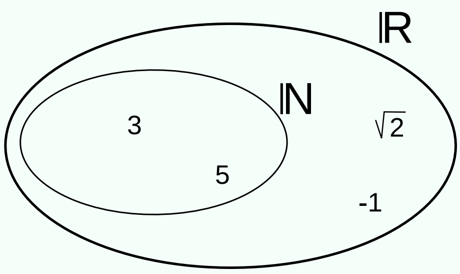
$$M = \{\text{lundi}\,;\,\text{mardi}\,;\,\text{mercredi}\,;\,\text{jeudi}\,;\,\text{vendredi}\}$$

Cet ensemble est fini, il représente les jours de classe d'une semaine.
Son cardinal est :

$$\text{card}(M) = 5$$

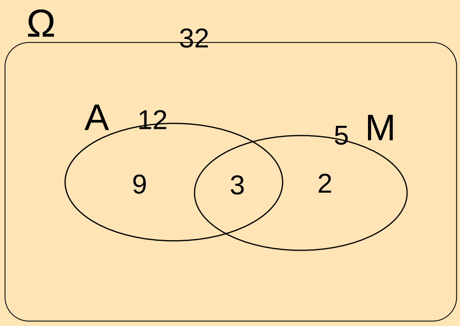
Exemple 2

On considère les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. C'est un ensemble infini.
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels (positifs ou nuls). C'est un ensemble infini.
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.



Exercice

Dans une classe de 32 élèves, 12 suivent l'option arts et 5 suivent l'option musique. On sait que 3 élèves suivent les 2 options.
1. Combien d'élèves ne suivent qu'une seule activité ?
2. Combien d'élèves ne suivent aucune de ces 2 options ?
3. Quelle est la proportion d'élèves qui suivent l'une ou l'autre des ces 2 options (au moins une des deux) ?



II) Principe multiplicatif

Définition

Le **principe multiplicatif** permet de déterminer un nombre de possibilités lorsqu'une situation se déroule en plusieurs étapes indépendantes.
Si une première étape peut être réalisée de a façons et une deuxième étape de b façons, alors le nombre total de possibilités est :

$$a \times b$$

Exemple 1

4 élèves doivent s'asseoir sur 4 sièges alignés.
Le premier siège peut être occupé de 4 façons différentes.
Le deuxième siège peut être occupé de 3 façons différentes.
Le troisième siège peut être occupé de 2 façons différentes.
Le dernier siège peut être occupé d'une seule façon.
Le nombre total de placements est :

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Il existe donc **24 placements différents**.

Exemple 2

Dans un restaurant, un menu propose :

— 2 entrées ;

— 3 plats principaux ;

— 2 desserts.

Un client choisit :

— une entrée ;

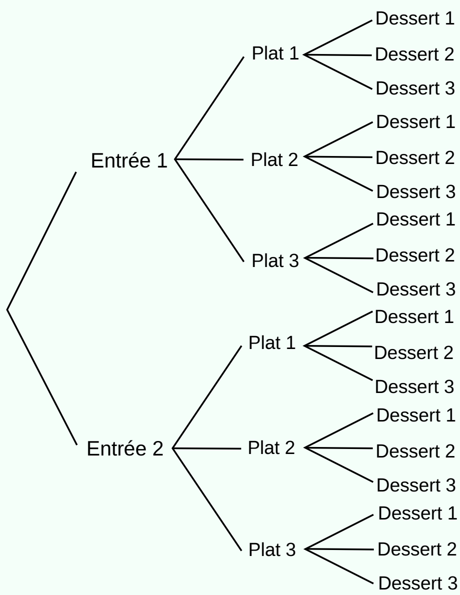
— un plat ;

— un dessert.

Le nombre total de menus possibles est :

$$2 \times 3 \times 2 = 12$$

Il existe donc **12 menus différents**. On peut illustrer cette situation avec un arbre :



Exercice

Une tenue est composée :

— de 3 pantalons ;

— de 4 tee-shirts ;

— de 2 paires de chaussures.

Combien de tenues différentes peut-on former ?

III) Arrangement avec répétition

Définition

Un **arrangement avec répétition** est une liste ordonnée d'éléments dans laquelle un même élément peut apparaître plusieurs fois.

Exemple 1

On lance un dé à 6 faces **trois** fois de suite.
À chaque lancer, le résultat peut être :

$$1; 2; 3; 4; 5; 6$$

Le nombre total de résultats possibles est :

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

Il existe donc **216 possibilités**.

Exemple 2

On écrit un mot de passe composé de 4 lettres.
Combien y a-t-il de mots de passe possibles ?

L'alphabet est un ensemble de lettres :

$$\alpha = \{A, B, C, D, \dots, X, Y, Z\}$$

Un mot de passe correspond à une liste de 4 éléments de cet ensemble, tels que les éléments peuvent se répéter, comme :

$$(E, Z, E, H)$$

L'alphabet latin (français) compte 26 lettres (de A à Z).
- Pour la 1ère lettre, il y a 26 choix possibles.
- Pour la 2ème lettre, il y a 26 choix possibles.
- Pour la 3ème lettre, il y a 26 choix possibles.
- Pour la 4ème lettre, il y a 26 choix possibles.

Le nombre de mots de passe possibles est donc :

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^4 = 456\,976$$

Ici, il s'agit d'un arrangement avec répétition de 4 éléments parmi 26.

IV) Arrangement sans répétition

Définition

Un **arrangement sans répétition** est une liste ordonnée d'éléments dans laquelle chaque élément ne peut être utilisé **qu'une seule fois**.

Exemple 1

On choisit successivement 3 élèves différents parmi 8 élèves pour former un podium.
Le nombre de possibilités est :

$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

Il existe donc **336 podiums différents**.

Exemple 2

On écrit un mot de passe composé de 4 lettres **différentes**.
Combien y a-t-il de mots de passe possibles ?

L'alphabet est un ensemble de lettres :

$$\alpha = \{A, B, C, D, \ldots, X, Y, Z\}$$

Un mot de passe correspond à une liste de 4 éléments de cet ensemble tels que les éléments ne peuvent pas se répéter, comme :

$$(E, Z, B, H)$$

Puisque les 4 lettres doivent être différentes, le nombre de choix diminue à chaque position.

Encore une fois, nous considérons un alphabet de 26 lettres.
- **Pour la 1ère lettre :** il y a 26 choix possibles.
- **Pour la 2ème lettre :** la première lettre ayant déjà été choisie et ne pouvant être répétée, il ne reste que 25 choix possibles.
- **Pour la 3ème lettre :** les deux premières lettres ayant déjà été choisies et ne pouvant être répétées, il ne reste que 24 choix possibles.
- **Pour la 4ème lettre :** les trois premières lettres ayant déjà été choisies et ne pouvant être répétées, il ne reste que 23 choix possibles.

Le nombre de listes possibles est donc :

$$26 \times 25 \times 24 \times 23 = 358\,800$$

Ici, il s'agit d'un arrangement sans répétition de 4 éléments parmi 26.

V) Permutation

Définition

Une **permutation** est un arrangement utilisant **tous** les éléments d'un ensemble **une seule fois**.

Exemple

6 coureurs participent à une finale.
On souhaite connaître le nombre de classements possibles.
Le nombre total de classements est :

$$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Il existe donc **720 classements possibles**.

Remarque

Dans une permutation, l'ordre des éléments est important.
Par exemple :

$$(A, B, C) \neq (C, B, A)$$

Exercice

Combien peut-on former d'anagrammes du mot **LUNE** ?