Probabilités

1. Quelques rappels de probabilités

Définition 1

Soient A et B deux événements tels que $P(A) \neq 0$. La probabilité que l'événement B se réalise sachant que A s'est réalisé se note $P_A(B)$ ou $P(B|A)$ et se prononce « P de B sachant A ». On a :

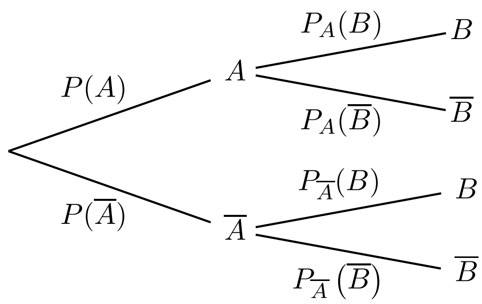
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Théorème 1

Soient A et B deux événements. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

Méthode

Construction de l'arbre de probabilité : « Règle du produit ».



$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P_A(\overline{B})$

$P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B)$

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(\overline{B})$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

Définition 2

Deux événements A et B de l'univers sont **indépendants** si et seulement si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Théorème 2

Si deux événements A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Propriété 1 – Formule des probabilités totales

Soit $\{\Omega_1\,;\,\Omega_2\,;\,\ldots\,;\,\Omega_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ une partition de l'univers Ω ((événements incompatibles deux à deux et dont la réunion est Ω) muni d'une loi de probabilité P.

Soit A un événement de Ω. $P(A) = P(A \cap \Omega_1) + P(A \cap \Omega_2) + \cdots + P(A \cap \Omega_n)$

2. Variable aléatoire

On considère le jeu d'argent suivant. Le joueur lance un dé équilibré à 6 faces et on regarde la face obtenue.

- Si le dé affiche 1 ou 2 ou 3 ou 4, le joueur perd 10 €,
- Si le dé affiche 5, le joueur gagne 15 €,
- Si le dé affiche 6, le joueur gagne 25 €.

L'**univers** de cette **expérience aléatoire** est : $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$. On a :

ω_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Ceci modélise mal le problème. Ce n'est pas vraiment le chiffre indiqué par le dé qui nous intéresse dans ce jeu d'argent, mais plutôt le gain obtenu. Créons donc une fonction X qui, à chaque chiffre du dé, associe le gain occasionné. X est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ 1 &\longmapsto -10 \\ 2 &\longmapsto -10 \\ 3 &\longmapsto -10 \\ 4 &\longmapsto -10 \\ 5 &\longmapsto 15 \\ 6 &\longmapsto 25 \end{aligned}$$

Donc X prend ses valeurs dans $E = \{-10\,;\,15\,;\,25\}$ et on peut lui associer la loi de probabilité P :

x_i	-10	15	25
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition 3 – Variable aléatoire

Une **variable aléatoire** définie sur un univers Ω lié à une expérience aléatoire est une fonction qui, à chaque élément ω_i de Ω, associe un unique nombre réel x_i. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 4 – Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω à images dans un sous-ensemble fini E de $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ le cardinal (nombre d'éléments) de l'ensemble E.
Définir la **loi de probabilité** de X, c'est associer à tout x_i de E la probabilité $P(X = x_i)$. On a :

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + \ldots + P(X = x_n) = 1$$

On répète de nombreuses fois l'expérience. En théorie, le gain par partie du joueur sera de -10 € avec une fréquence de 4 parties sur 6, 15 € avec une fréquence de 1 partie sur 6 et 25 € avec une fréquence de 1 partie sur 6.
Le gain moyen par partie, appelé « espérance de X » peut donc être calculé par la formule :

$$\begin{aligned} E(X) &= -10 \times \frac{4}{6} + 15 \times \frac{1}{6} + 25 \times \frac{1}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le gain moyen du joueur est donc de 0 €. On dit que le jeu est **équitable** ou **équilibré**.

Définition 5 – Espérance d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $E = \{x_1\,;\,x_2\,;\,x_3\,;\,\dots\,;\,x_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit P une loi de probabilité associée à X.

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Alors, l'**espérance** de la variable aléatoire X vaut :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i\,p_i \\ &= p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + p_3\,x_3 + \dots + p_n\,x_n \end{aligned}$$

Intéressons-nous désormais à la « dispersion » des gains autour de l'espérance. Les indicateurs pour mesurer cela sont la variance et l'écart type de la variable aléatoire X. L'écart entre chaque valeur x_i de X et l'espérance est $|x_i - E(X)|$. La variance de X est la moyenne des carrés de ces écarts :

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + p_3\left(x_3 - E(X)\right)^2 \\ &= \frac{4}{6}\,(-10-0)^2 + \frac{1}{6}\,(15-0)^2 + \frac{1}{6}\,(25-0)^2 \\ Var\,(X) &= \frac{625}{3} \end{aligned}$$

L'écart-type σ de la v.a. X est définie par :

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{Var(X)} \\ &= \sqrt{\frac{625}{3}} \\ \sigma(X) &\approx 14,43 \end{aligned}$$

Cette valeur nous donne une idée de la dispersion des gains du joueur au cours des parties. Ils sont écartés en moyenne (quadratique) de $14,43$ € de l'espérance.

Définition 6 – Variance et écart type d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans un ensemble $E = \{x_1\,;\,x_2\,;\,x_3\,;\dots;\,x_n\}$ et de loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Alors la **variance** de la variable aléatoire X est définie par :

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - E(X)\right)^2 \\ &= p_1\left(x_1 - E(X)\right)^2 + p_2\left(x_2 - E(X)\right)^2 + \dots + p_n\left(x_n - E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

Et l'**écart-type** de la variable aléatoire X est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var\,(X)}$$

Propriété 2

$$Var\,(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

Nous souhaitons adapter le jeu aux gros joueurs en multipliant tous les gains par 1 000. De plus, les joueurs doivent maintenant payer 50 € pour jouer une partie.

La variable représentant les nouveaux gains (algébriques) du joueur est donc : $Y = 1\,000\,X - 50$

Intuitivement :

- En multipliant tous les gains par 1 000, le gain moyen sera multiplié par 1 000.
- En retirant 50 € à tous les gains, le gain moyen sera diminué de 50 €.
- En multipliant tous les gains par 1 000, l'écart-type sera lui aussi multiplié par 1 000.
- En retirant 50 € à tous les gains, l'écart-type ne change pas.

Propriété 3

Soient X une variable aléatoire et a et b deux réels.

$$E(a\,X + b) = a\,E(X) + b \qquad Var\,(a\,X + b) = a^2\,Var\,(X)$$

Application

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y.
2. Déterminer alors son espérance. A-t-on intérêt à jouer durablement à ce jeu ?

1. La variable aléatoire Y est définie par $Y = 1000X - 50$. On calcule les images des valeurs de X :

$$X = -10 \Rightarrow Y = 1000 \times (-10) - 50 = -10050$$
$$X = 15 \Rightarrow Y = 1000 \times 15 - 50 = 14950$$
$$X = 25 \Rightarrow Y = 1000 \times 25 - 50 = 24950$$

On en déduit la loi de probabilité de Y :

y_i	-10050	14950	24950
$P(Y = y_i)$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. On utilise les propriétés :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad \text{et} \qquad Var\,(a\,X + b) = a^2\,Var\,(X)$$

Or $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{625}{3}} = \frac{25}{\sqrt{3}}$, donc :

$$E(Y) = 1000 \times 0 - 50 = -50$$

$Var(Y) = 1000^2 Var(X) = 1000^2 \times \frac{625}{3}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{1000^2 \times \frac{625}{3}} \approx 14433$

Conclusion : le joueur perd en moyenne 50 € par partie, avec une très grande dispersion des gains (écart-type d'environ 14433 €). Il n'est donc pas avantageux de jouer durablement à ce jeu.

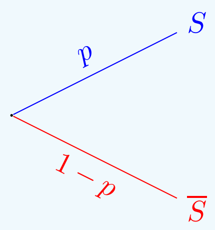
3. Loi binomiale

Définition 7 – Épreuve de Bernoulli

On considère une expérience aléatoire à deux issues :

- S (appelé **succès**) avec une probabilité p ;
- $\overline{S}$ (appelé **échec**) avec une probabilité $1-p$.

Cette situation constitue une **épreuve de Bernoulli**.



Exemple

On lance un dé cubique équilibré, le succès étant S : « Obtenir 6 ». Alors : $p\,(S)=\dfrac{1}{6}$ et $p\,(\overline{S})=\dfrac{5}{6}$.

Définition 8 – Loi de Bernoulli

On considère une **épreuve de Bernoulli**. Soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le succès S est réalisé et 0 sinon. X est alors appelée **variable aléatoire de Bernoulli de paramètre** p.

La loi de probabilité de X est appelé **loi de Bernoulli**.

Remarque

On peut résumer la loi de Bernoulli dans le tableau suivant.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$1-p$	p

Propriété 4 – Indicateurs d'une loi de Bernoulli

L'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire de Bernoulli X sont donnés par :

$$E(X)=p \qquad V(X)=p\,(1-p) \qquad \sigma(X)=\sqrt{p\,(1-p)}$$

Définition 9 – Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques dans des conditions d'indépendance (c'est-à-dire que l'issue d'une épreuve ne dépend pas des issues des épreuves précédentes).

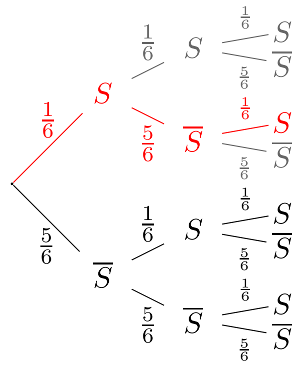
Exemple

On répète trois fois le lancer d'un dé cubique équilibré, le succès de chaque lancer étant S : « On obtient 6 ». On peut représenter ce schéma de Bernoulli à l'aide de l'arbre ci-contre. Comme les épreuves sont indépendantes, la probabilité d'avoir successivement *succès-échec-succès* est :

$$\frac{1}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$$

On peut remarquer que tous les chemins composés de deux *succès* et un *échec* ont la même probabilité. De même, chacun des chemins composés d'un *succès* et deux *échecs* a une probabilité égale à :

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}$$



Propriété 5 – Coefficients binomiaux

Soient n et k deux entiers naturels, avec $0 \leqslant k \leqslant n$. Dans un arbre, le nombre de chemins correspondant à k succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli est égal au **coefficient binomial** :

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$$

Définition 10 – Loi binomiale de paramètres n et p

Soit un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves indépendantes. Soit X la variable aléatoire qui, à une suite de n résultats, associe le nombre de succès.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p. Cette loi est notée $\mathcal{B}\,(n\,;\,p)$. « X suit une loi binomiale de paramètres n et p » se note : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

Propriété 6 – Probabilité avec une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

Alors, pour tout entier k, avec $0 \leqslant k \leqslant n$: $\qquad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \,(1-p)^{n-k}$

Exemple

On répète trois fois le lancer d'un dé cubique équilibré, le succès de chaque lancer étant S : « On obtient 6 ». Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès.

$$X \sim \mathcal{B}\left(3\,;\,\frac{1}{6}\right)$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{25}{36} = \frac{25}{72}$$

Propriété 7 – Indicateurs d'une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. L'espérance, la variance et l'écart-type de X sont donnés par :

$$E(X) = n \times p \qquad V(X) = n\,p\,(1-p) \qquad \sigma(X) = \sqrt{n\,p\,(1-p)}$$

Exemple

Reprenons l'exemple précédent.

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \qquad V(X) = 3 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{36} \qquad \sigma(X) = \sqrt{\frac{15}{36}} = \frac{\sqrt{15}}{6}$$

Application

$$X \sim \mathcal{B}(70\,;\,0,4)$$

1. Calculer, avec la calculatrice pour les $4^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ calculs.

$$P(X=50) \qquad E(X) \qquad P(X=28) \qquad P(X<28) \qquad P(25 \leqslant X \leqslant 35) \qquad \sigma(X)$$

2. Une urne contient 8 boules rouges et 12 bleues. On tire successivement avec remise 70 boules de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer au moins 28 boules rouges ?