

Produit scalaire (rappels)

I) Norme d'un vecteur et angles

A) Norme d'un vecteur

Définition ||| Soient deux représentants \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ d'un même vecteur \vec{u} . Les segments $[AB]$ et $[A'B']$ ont la même longueur qui est appelée **norme** du vecteur \vec{u} , noté $\|\vec{u}\|$.

Propriété

1. La norme $\|\vec{u}\|$ est un réel positif ou nul.
2. $\|\vec{u}\| = 0$ si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.
3. Soit $\vec{u}(x; y)$ dans un repère orthonormé. Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.
5. $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Définition ||| Un vecteur est dit **unitaire** si sa norme est égale à un.

Remarque ||| Soit \vec{u} un vecteur non nul. Alors $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est un vecteur unitaire, colinéaire à \vec{u} .

B) Angles géométriques et angles orientés

Définition ||| Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Les mesures en radians de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$ sont les mesures en radians de l'angle orienté \widehat{AOB} .

Remarque

Nous distinguerons angle **géométrique** et angle **orienté** : un angle **géométrique** est toujours **positif**. Ce n'est pas le cas d'un angle **orienté** qui peut être **négatif**, et dont le sens dépend de l'orientation choisie.

On notera : $(\vec{u}; \vec{v})$ pour un angle orienté, et $(\widehat{\vec{u}}; \widehat{\vec{v}})$ pour un angle géométrique.

Exemple

Si l'orientation choisie est le sens trigonométrique, on a :

$$\begin{aligned}(\widehat{\vec{AB}}; \widehat{\vec{AC}}) &= \frac{\pi}{2} = (\widehat{\vec{AC}}; \widehat{\vec{AB}}) \\ (\vec{AB}; \vec{AC}) &= \frac{\pi}{2} \text{ et } (\vec{AC}; \vec{AB}) = \frac{-\pi}{2}\end{aligned}$$



Définition

Si les droites (OA) et (OB) sont perpendiculaires, on dit que les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

C) Projection orthogonale d'un vecteur

Définition

Soit \vec{u} un vecteur non nul, (d) une droite de direction \vec{u} . Soit un vecteur \vec{v} dont \vec{AB} est un représentant, et soient A' et B' les projections orthogonales de A et B sur (d) . La projection orthogonale du vecteur \vec{v} sur la droite (d) est le vecteur dont un représentant est le vecteur $\vec{A'B'}$.

II) Expression du produit scalaire

A) Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini par :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{\vec{u}}; \widehat{\vec{v}})$ lorsque \vec{u} et \vec{v} sont non nuls
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ lorsque $\vec{u} = 0$ ou lorsque $\vec{v} = 0$.

Remarque

1. On a immédiatement $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
2. Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} , noté $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$ est le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec \vec{u} et \vec{v} des représentants des vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} .
3. On notera indifféremment $\vec{AB} \cdot \vec{AB} = \vec{AB}^2 = AB^2 = \|\vec{AB}\|^2$

Propriété

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si ($\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou \vec{u} et \vec{v} orthogonaux)
3. Pour \vec{u} et \vec{v} non nuls, l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ est aigu si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$
4. Pour \vec{u} et \vec{v} non nuls, l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$ est obtus si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

B) Autres expressions du produit scalaire

Propriété

1. **Projection orthogonale** : si \vec{u} est non nul, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1$ où \vec{v}_1 est la projection orthogonale de \vec{v} sur une droite de direction \vec{u} .
2. **Carré scalaire** : Pour tous vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
3. **Expression analytique** : dans un repère orthonormé, si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(x; y)$ et $(x'; y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Exemple

Soit $\vec{u}(2; -3)$ et $\vec{v}(1; 4)$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + (-3) \times 4 = -10$

III) Propriétés et applications du produit scalaire

A) Calculer avec le produit scalaire

Propriété

Pour tout vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , et pour tout réel k , on a :

1. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
4. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
6. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$