Fonction logarithme en base a

S6M5 - 2025-2026

I) Rappels de cours

Définition

Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si $a^x = b$, alors $x = \log_a(b)$. La fonction logarithme de base a est définie par :

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x) \end{aligned}$$

Remarques

- Les fonctions exponentielle de base a et la fonction logarithme de base a sont réciproques l'une de l'autre.
- $\log_{10}$ est appelé « logarithme décimal »et se note souvent plus simplement log.
- $\log_e(x) = \ln(x)$.
- $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(a^x) = x$ et $a^{\log_a(x)} = x$.
- $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.

II) Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes (on déterminera systématiquement le domaine de définition) :

1. $\log_2(x) + \log_2(x-1) = \log_2(6)$
2. $\log_3(x) + \log_3(x-2) = \log_3(15)$
3. $\log_5(x) + \log_5(x-4) = \log_5(9)$
4. $\log_2(x) + \log_2(x-5) = \log_2(14)$
5. $\log(x) + \log(x-9) = \log(16)$
6. $\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 2$
7. $\log_3(x) + \log_3(x-1) = \log_3(x+5)$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes (on déterminera systématiquement le domaine de définition) :

1. $\log_2(x) + \log_2(x-1) \geqslant \log_2(6)$
2. $\log_3(x) + \log_3(x-2) < \log_3(10)$
3. $\log_2(x-1) + \log_2(x-3) \leqslant 2$
4. $\log(x) + \log(x-4) > \log(5)$
5. $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) \geqslant 1$
6. $\log_3(x) + \log_3(x-1) \leqslant \log_3(8)$