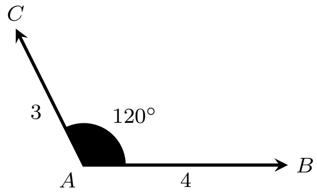
Vecteurs et droites dans le plan

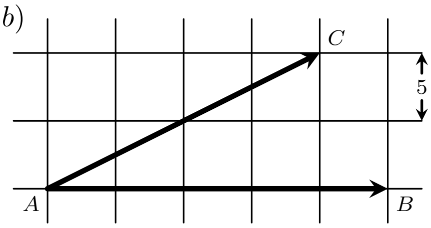
Exercice 1

1. Dans chaque cas, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Dans la situation b), calculer $\widehat{BAC}$ au degré près.

a)



b)

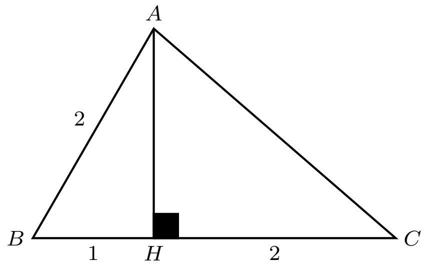


Exercice 2

Calculer :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ $\quad$ $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AH}$ $\quad$ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\widehat{ABC}$



Exercice 3

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(-4\,;\,1)$, $B\,(-1\,;\,2)$ et $C\,(1\,;\,-4)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.
2. Que peut-on dire du triangle ABC ? Calculer son aire.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$, on considère les points $A\,(4\,;\,1)$, $B\,(0\,;\,5)$ et $C\,(-2\,;\,-1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer au degré près la mesure de $\widehat{BAC}$.

Exercice 5

Dans chacun des cas suivants, déterminer m sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$a)\quad \vec{u}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}m\\-2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\quad \vec{u}\begin{pmatrix}m-4\\2m+1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2m\\3-m\end{pmatrix}$ $\qquad$ $c)\quad \vec{u}\begin{pmatrix}m\\3-m\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-m\end{pmatrix}$

Exercice 6

1. Déterminer deux vecteurs directeurs de chacune des droites suivantes.

$(d_1)\ :\ 3\,x-2\,y+7=0 \qquad (d_2)\ :\ x+\dfrac{1}{2}\,y-236=0 \qquad (d_3)\ :\ x=-5$

$(d_4)\ :\ y=3\,x-15 \qquad (d_5)\ :\ y=321 \qquad (d_6)\ :\ \dfrac{3}{4}\,x+\dfrac{11}{2}\,y+1=0$

2. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites précédentes.

Exercice 7

1. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.
   a) (d_1) passe par $A\,(7\,;\,-2)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}\,\left(2\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$.
   b) (d_2) passe par $B\,(-1\,;\,4)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$.
   c) (CD) sachant que $C\,(1\,;\,5)$ et $D\,(6\,;\,-5)$.
   d) (d_4) passe par $E\,(4{,}5\,;\,-2)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites précédentes.

Exercice 8

Représenter les droites suivantes dans un repère.

$(d_1)\ :\ -2\,x+5\,y+1=0 \qquad (d_2)\ :\ \begin{cases} x=2\,t \\ y=-5-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Exercice 9

Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.

$(d_1)\ :\ \begin{cases} x=-2+7\,t \\ y=7+5\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (d_2)\ :\ \begin{cases} x=2\,t \\ y=-1+5\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

$(d_3)\ :\ \begin{cases} x=8 \\ y=5\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad (d_4)\ :\ \begin{cases} x=9-3\,k \\ y=2 \end{cases} \quad k\in\mathbb{R}$

Exercice 10

1. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite Δ_i parallèle à (d_i) et passant par $A\,(-1\,;\,2)$.

$(d_1)\ :\ 3\,x-2\,y+7=0 \qquad (d_2)\ :\ y=3\,x-15 \qquad (d_3)\ :\ \begin{cases} x=-2+7\,t \\ y=7+5\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

2. Dans chaque cas, déterminer une représentation paramétrique de Δ_i, parallèle à (d_i) passant par $A\,(-1\,;\,2)$.

$(d_1)\ :\ 2\,x+6\,y=0 \qquad (d_2)\ :\ y=-2\,x+7 \qquad (d_3)\ :\ \begin{cases} x=-2+7\,t \\ y=7+5\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$

Exercice 11

Les points $A\,(-1\,;\,-2)$, $B\,(-5\,;\,7)$, $C\,(1\,;\,16)$ et $D\left(0\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ appartiennent-ils aux droites suivantes ?

$$(d_1)\ :\ 7\,x-3\,y+1=0 \qquad\qquad (d_2)\ :\ \begin{cases} x=-5+2\,t \\ y=7+3\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Exercice 12

1. Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites suivantes.
   a) (d_1) passe par $A\,(7\,;\,-2)$ et admet pour vecteur normal $\vec{u}\left(-2\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$.
   b) (d_2) passe par $B\,(-1\,;\,4)$ et admet pour vecteur normal $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.
   c) (d_3) passe par $E\,(4,5\,;\,-2)$ et admet pour vecteur normal $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites précédentes.

Exercice 13

$$(d_1)\ :\ 7\,x-3\,y+1=0 \qquad\qquad (d_2)\ :\ -3\,x+2\,y+1=0$$

$$(d_3)\ :\ \begin{cases} x=-5+2\,t \\ y=7+3\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R} \qquad\qquad (d_4)\ :\ \begin{cases} x=2\,t \\ y=-5-t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

Déterminer les éventuels points d'intersection des droites :

a) (d_1) et (d_2) *b)* (d_3) et (d_4) *c)* (d_1) et (d_3) *d)* (d_2) et (d_4) *e)* (d_2) et (d_3)

Exercice 14

$$(d)\ :\ 5\,x-3\,y+7=0 \qquad\qquad \delta\ :\ \begin{cases} x=5-9\,t \\ y=1+4\,t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

1. Déterminer une équation de la droite (D) perpendiculaire à (d) passant par $A\,(5\,;\,2)$.
2. Déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à δ passant par $B\,(0\,;\,2)$.

Exercice 15

1. Tracer $\Delta\ :\ 2\,x+y-4=0$ et placer $M\,(4\,;\,3)$ dans un repère orthonormé d'unité 1 *cm*.
2. Déterminer les coordonnées de H, projeté orthogonal de M sur Δ. Placer H dans le repère.
3. Déterminer la distance de M à Δ de deux manières différentes. *Vérifier en mesurant sur le dessin.*

Exercice 16 .... Composition - Juin 2022

Un ferry fait la liaison entre Plymouth et Saint-Malo (dans la Manche, donc) en suivant une ligne droite (d). Un deuxième navire se trouve dans les environs et se déplace en ligne droite sur (d').

$$(d)\ :\ \begin{cases} x = -9 + t \\ y = 50 - 2\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+ \qquad\qquad (d')\ :\ \begin{cases} x = 7 \\ y = -10 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^+$$

t représente le temps en secondes à partir du départ du ferry. L'unité de longueur est de 5 m.

1. Calculer la vitesse du ferry.
2. Les garde-côtes reçoivent un appel de détresse du ferry qui risque d'entrer en collision avec l'autre navire si aucun des deux ne change de cap.
   a) Montrer que les trajectoires des deux navires se croisent et déterminer les coordonnées du point d'intersection.
   b) Déterminer le temps entre les passages des navires en ce point.
   c) L'appel de détresse vous semble-t-il justifié ? Argumenter.
3. Tracer (d) et (d') dans un repère orthonormé.
4. Déterminer par le calcul la mesure de l'angle entre les deux trajectoires.
5. Un troisième navire transportant des matières toxiques se trouve ancré au point $A\,(-16\,;\,20)$. Tous les bateaux ont interdiction de se trouver à tout moment à plus de 100 m de ce navire. Le ferry ne dévie pas de la trajectoire qu'il a prévue. Est-ce bien raisonnable ?
6. Un quatrième navire suit la trajectoire $\mathcal{C}_f$, représentation graphique de $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{32\,x + 66}{x + 2}$ pour $x > -2$.
   a) Tracer $\mathcal{C}_f$ dans le repère.
   b) Montrer que les trajectoires du ferry et de ce quatrième navire sont tangentes en un point dont on précisera les coordonnées.

Exercice 17 .... Composition - Juin 2024

Il est conseillé de tracer un repère orthonormé et d'y placer tous les objets géométriques de l'exercice.

$$A\,(3\,;\,1) \qquad B\,(0\,;\,1 + 3\sqrt{3}) \qquad C\,(-3\,;\,1) \qquad D\,(1\,;\,1 - 2\sqrt{3})$$

$$\Delta\ :\ \begin{cases} x = 6 + t \\ y = -4 - \sqrt{3}\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad (d_1)\ :\ \begin{cases} (d_1) /\!/ \Delta \\ A \in (d_1) \end{cases} \qquad (d_2)\ :\ \begin{cases} x = -2 - 2\,t \\ y = 1 - 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que $(d_1)\ :\ \sqrt{3}\,x + y - 3\sqrt{3} - 1 = 0$. Le point B appartient-il à (d_1) ?
2. Les points A et D appartiennent-ils à (d_2) ?
3. Déterminer la mesure de l'angle entre les droites (d_1) et (d_2).
4. Montrer que C est équidistant de (d_1) et (d_2).
5. Montrer que tous les points d'ordonnée 1 sont équidistants de (d_1) et (d_2).
6. Déterminer la mesure de l'angle entre les droites (d_1) et $\delta\ :\ y = 1$. Que représente δ pour $\widehat{BAD}$?
7. Il existe une autre droite dont tous les points sont équidistants de (d_1) et (d_2).
   Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.