

# Vecteurs et droites du plan

## 1. Approche géométrique d'un vecteur (rappels)

### Définition 1

Un **vecteur** est un objet mathématique qui possède une **direction**, un **sens** et une **norme**.  
On le représente généralement par une flèche. Un vecteur permet de définir un déplacement entre deux points. On note par exemple le vecteur allant du point  $A$  au point  $B$  par  $\overrightarrow{AB}$ .

### Remarques

- Cette définition de vecteur n'est pas extrêmement solide mathématiquement, mais nous nous en contenterons au niveau lycée.
- Contrairement à un point, un vecteur n'a pas de position fixe dans un repère.

### Notation

La norme du vecteur  $\overrightarrow{AA'}$  se note  $\|\overrightarrow{AA'}\|$ . On a :  $\|\overrightarrow{AA'}\| = AA'$ .

### Propriété 1

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan distincts deux à deux.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \iff ABCD \text{ est un parallélogramme (éventuellement plat)}$$

### Définition 2 – Relation de Chasles

On définit la **somme vectorielle**  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  comme étant le vecteur  $\overrightarrow{AC}$ .

### Définition 3 – Produit d'un vecteur par un réel

Soient  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $k$  un réel non nul. Le vecteur noté  $k\vec{u}$  a :

- la même direction que  $\vec{u}$ ,
- le même sens que  $\vec{u}$  si  $k > 0$ , le sens contraire si  $k < 0$ ,
- une norme égale à  $k \times \|\vec{u}\|$  si  $k > 0$ , à  $-k \times \|\vec{u}\|$  si  $k < 0$ ; autrement dit : une norme égale à  $|k| \times \|\vec{u}\|$ .

### Définition 4

Deux vecteurs non nuls sont dits **colinéaires** s'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$ .

### Propriété 2

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement s'ils ont la même direction.

## 2. Travaux analytiques sur les vecteurs

On se place dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

### Propriété 3

On considère les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ . On a :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

### Propriété 4

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur. Sa norme vaut :  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points. On a :  $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

### Propriété 5

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs. Le vecteur somme  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ .

### Propriété 6

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $k \in \mathbb{R}$ . Le vecteur  $k\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

### Définition 5

On appelle **déterminant** de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  le nombre réel  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$ .

### Remarque

On note aussi  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

### Propriété 7

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

### Propriété 8

- $(AB) \parallel (CD) \iff \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  colinéaires
- Trois points distincts  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

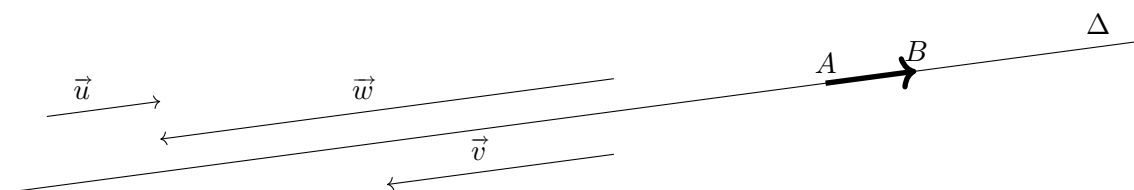
### 3. Vecteur directeur

#### Définition 6

On appelle **vecteur directeur** d'une droite  $\Delta$  du plan tout vecteur  $\vec{u}$  ayant la même direction que  $\Delta$ .

#### Remarque

Une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires.  $\overrightarrow{AB}$  est un vecteur directeur de la droite  $(AB)$ .



#### Exercice

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$  un vecteur directeur d'une droite  $(d)$ . Le vecteur  $\vec{v} \begin{pmatrix} -14, 8 \\ 25, 9 \end{pmatrix}$  est-il un vecteur directeur de  $(d)$  ?

### 4. Équations cartésiennes d'une droite

#### Définition 7 – (et propriété)

Toute droite  $\Delta$  du plan admet une **équation cartésienne** de la forme  $ax + by + c = 0$  avec  $a, b$  et  $c$  trois réels tels que  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ . On note  $\Delta : ax + by + c = 0$ .

#### Application

Soit la fonction affine  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto \frac{2}{3}(8 - 5x)$ .

1. Donner l'équation réduite de la droite  $D_f$  représentant la fonction  $f$ .
2. Déterminer une équation cartésienne de  $D_f$ .

#### Remarque

Les réels  $a, b$  et  $c$  ne sont pas uniques. Autant que possible, on essaie de faire en sorte que  $a, b$  et  $c$  soient des entiers (sans que cela soit obligatoire). Si on reprend l'exemple précédent, on a :

$$\frac{10}{3}x + y - \frac{16}{3} = 0 \iff 10x + 3y - 16 = 0$$

Ainsi  $10x + 3y - 16 = 0$  est aussi une équation cartésienne de  $D_f$ .  $D_f : 10x + 3y - 16 = 0$

## Propriété 9

- Soit  $\Delta : ax + by + c = 0$  une droite du plan. Alors  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .
- Inversement, soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  un vecteur du plan.  
Alors, pour tout réel  $c$ ,  $\Delta : ax + by + c = 0$  est une droite du plan qui admet  $\vec{u}$  pour vecteur directeur.

## Remarque

Une droite  $\Delta$  du plan peut donc être définie par deux points distincts A et B de  $\Delta$  (ce que l'on sait depuis longtemps) mais peut aussi être définie par un point A de la droite et par  $\vec{u}$  un vecteur directeur de cette droite  $\Delta$ .

## Application

Soient  $A(5; -2)$  un point et  $\vec{u} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$  un vecteur du plan.

Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u}$  passant par le point A.

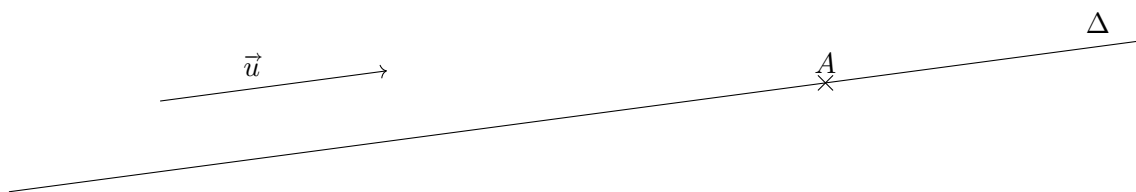
## 5. Droites parallèles

## Propriété 10

Deux droites  $D : ax + by + c = 0$  et  $D' : a'x + b'y + c' = 0$  sont parallèles si et seulement si  $ab' - a'b = 0$ .

**Démonstration :** Un vecteur directeur de  $D$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  et un vecteur directeur de  $D'$  est  $\vec{v} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ . Ainsi :  
 $D$  et  $D'$  parallèles  $\Leftrightarrow \vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires  $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (-b)a' - a(-b') = 0 \Leftrightarrow -ba' + ab' = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$ .

## 6. Équations paramétriques d'une droite



La droite  $\Delta$  passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$  peut aussi se noter  $(A; \vec{u})$ .

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires.} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} ; \overrightarrow{AM} = k \vec{u} \end{aligned}$$

## Définition 8

$\overrightarrow{AM} = k \vec{u}$  est l'équation vectorielle de  $\Delta$ .

## Propriété 11 – (et définition)

Soient  $A(x_A; y_A)$  un point du plan et  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  un vecteur du plan.

$$\begin{aligned} M(x; y) \in (A; \vec{u}) &\iff \exists t \in \mathbb{R}; \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R}; \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases} \end{aligned}$$

On dit que ce système est un **système d'équations paramétriques** ou une **représentation paramétrique** de la droite  $(A; \vec{u})$ .

## Remarques

- $t$  est le paramètre. En physique, il représente souvent le temps.
- Une droite admet une infinité de systèmes d'équations paramétriques.
- Si  $\begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  représente  $\Delta$ , alors  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .

## Application

1. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point  $A(3; -7)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
2. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite  $(BC)$  avec  $B(-6; -11)$  et  $C\left(3; \frac{22}{7}\right)$ .

## 7. Droites perpendiculaires

## Définition 9

Soient deux droites  $\mathcal{D}$  et  $\Delta$  de vecteurs directeurs respectifs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$\mathcal{D} \text{ perpendiculaire à } \Delta \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux.}$$

On note également  $\mathcal{D} \perp \Delta \iff \vec{u} \perp \vec{v}$ .

On dit alors que  $\vec{u}$  est un **vecteur normal** de  $\Delta$  et que  $\vec{v}$  est un **vecteur normal** de  $\mathcal{D}$ .

## Remarque

Une droite admet une infinité de vecteurs normaux.

## Propriété 12

$$\Delta : ax + by + c = 0 \iff \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } \Delta$$

**Propriété 13**

Le **produit scalaire** de deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  vaut :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$

**Propriété 14**

Soient deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .  
 $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  orthogonaux  $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff x x' + y y' = 0$

**Application**

Soient  $A(5; -2)$  un point et  $\vec{n} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$  un vecteur du plan.

Déterminer une équation cartésienne de la droite  $\Delta$  de vecteur normal  $\vec{n}$  passant par le point  $A$ .

**8. Distance d'un point à une droite**

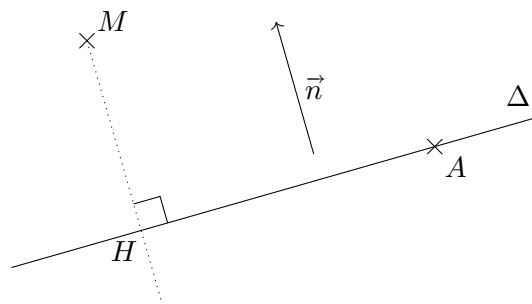
$M(x_M; y_M)$

$\Delta : a x + b y + c = 0$

$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  vecteur normal de  $\Delta$

$H$  est le **projeté orthogonal** de  $M$  sur  $\Delta$ .

$A(x_A; y_A) \in \Delta$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} \\ a(x_M - x_A) + b(y_M - y_A) &= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} \\ a x_M + b y_M - (a x_A + b y_A) &= 0 + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} \quad \text{car } \overrightarrow{AH} \perp \vec{n} \\ a x_M + b y_M + c &= \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} \quad \text{car } A \in \Delta \end{aligned}$$

Or  $\overrightarrow{HM}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires. Donc :

$$\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = HM \times \|\vec{n}\| \quad (\text{si } \overrightarrow{HM} \text{ et } \vec{n} \text{ ont le même sens}) \quad \text{OU} \quad \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = -HM \times \|\vec{n}\| \quad (\text{sinon}).$$

Dans tous les cas :  $HM \times \|\vec{n}\| = |a x_M + b y_M + c| \iff HM = \frac{|a x_M + b y_M + c|}{\|\vec{n}\|}$

**Propriété 15**

$M(x_M; y_M)$  et  $\Delta : a x + b y + c = 0$  La distance du point  $M$  à la droite  $\Delta$  est donnée par :

$$d(M; \Delta) = \frac{|a x_M + b y_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Application**

$M(9; 1)$  et  $\Delta : 8 x - y + 7 = 0$ . Calculer  $d(M; \Delta)$ .

**Remarque**

Pour calculer la distance entre deux droites parallèles, il suffit de calculer la distance entre un point de l'une des droites et l'autre droite.

**9. Le cercle****Propriété 16**

Une équation du cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $\Omega(a; b)$  et de rayon  $R$  est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

On peut aussi écrire une équation de cercle sous la forme :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .

**Propriété 17**

Un point  $M$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  si et seulement si

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$