Logarithme népérien

1. La fonction logarithme

Définition 1

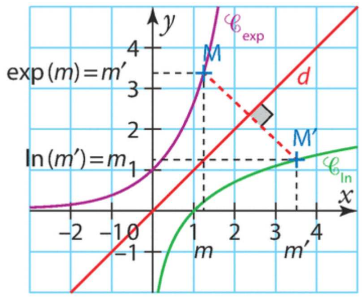
On appelle **logarithme népérien** d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln(a)$. La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln \ : \ \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln(x) \end{aligned}$$

Remarques

- Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

  Leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la droite d d'équation $y = x$.



- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+^*$. Alors : $\quad e^a = b \iff a = \ln b$

Propriété 1

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln x} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^x) = x$

Exemples

$\ln 1 = \ln e^0 = 0$ $\qquad$ $\ln e = \ln e^1 = 1$ $\qquad$ $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln e^{-1} = -1$ $\qquad$ $\ln e^2 = 2$

$e^0 = e^{\ln 1} = 1$ $\qquad$ $e^1 = e^{\ln e} = e$ $\qquad$ $e^{\ln 2} = 2$ $\qquad$ $e^{\ln(-2)}$ n'existe pas.

Application

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$(E) \ : \ e^{4x+5} - 5 = 3$ $\qquad$ $(I) \ : \ \ln(2\,x - 3) \leqslant 10$

2. Propriétés algébriques

Propriété 2

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- $\ln a = \ln b \iff a = b$
- $\ln a < \ln b \iff a < b$

Application
Résoudre les inéquations suivantes.

$$(I_1)\ :\ \ln(4x-1) > \ln(2-x) \qquad\qquad (I_2)\ :\ \ln(x^2+2x-3) \geqslant \ln 2$$

Propriété 3 – Relations fonctionnelles

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \forall n \in \mathbb{Z},$

- $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^n) = n \times \ln x$
- $\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln x$

Application
Calculer ou simplifier.

$$A = \ln\left(\frac{e}{4}\right) + \ln\left(\frac{1}{9e}\right) + \ln(36\,e) \qquad B = 3\ln 2 + \ln 32 - 5\ln 27$$

$$C = \ln(a^2) + \ln(4a) - 3\ln(\sqrt{a}) - 2\ln 2 \quad (a>0) \qquad D = \ln 75 - \ln\left(\frac{27}{125}\right) + 4\ln(3\times 45)$$

3. Dérivation

Propriété 4

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\quad \big(\ln x\big)' = \dfrac{1}{x}$

Propriété 5

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque
$\big(\ln x\big)'' = -\dfrac{1}{x^2}$ donc la fonction ln est concave.

Propriété 6 – Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur I. La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et :

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Application
Déterminer le maximum de la fonction $\quad f : x \longmapsto \ln(-2x^2+4x+6)$

4. Limites

Propriété 7

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

Remarque
Ainsi, $\mathcal{C}_{\ln}$ admet une asymptote verticale d'équation $\quad x = 0 \quad$ (l'axe des ordonnées).

Propriété 8 – Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0^+$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0^-$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0^+$

5. Fonctions logarithmes

Définition 2

Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Si $a^x = b$ alors $x = \log_a(b)$. La fonction logarithme de base a est :

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x) \end{aligned}$$

Remarque
Les fonctions exponentielle de base a et logarithme de base a sont réciproques l'une de l'autre.

Exercice

$A = \log_3(9) \qquad B = \log_5(0,008) \qquad C = \log_{10}(10\,000\,000) \qquad D = \log_2(128)$

Remarques
- $\log_{10}$ est appelé « logarithme décimal »et se note souvent plus simplement log.
- $\log_e = \ln$.
- $\log_a(1) = 0 \quad$ et $\quad \log_a(a) = 1$
- $\log_a(a^x) = x \quad$ et $\quad a^{\log_a(x)} = x$.
- $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.