

Exercice 1

1. Écrire les nombres suivants en fonction de $\ln 3$.

$$A = \ln 9 \qquad B = \ln \left(\frac{1}{3} \right) \qquad C = \ln (3\sqrt{3}) \qquad D = \ln 36 - 2 \ln 2$$

2. Écrire les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

$$A = \ln 50 \qquad B = \ln \left(\frac{16}{25} \right) \qquad C = \ln 250 \qquad D = \ln 20 - 2 \ln 50$$

3. Calculer les expressions numériques suivantes.

$$\begin{aligned} A &= \ln(e^3) + 2 \ln(e^{-1}) & B &= e^{2 \ln 5} - \ln((e^5)^2) & C &= \ln(e^{-2}) \times \ln(e^2) \\ D &= 30 \ln(\sqrt{e}) - e^{3 \ln 3} & E &= \frac{e^{3 + \ln 8}}{e^{2 + \ln 4}} & F &= \frac{e^{\ln 8}}{e^{3 \ln 2}} \\ G &= \ln(2 + \sqrt{3}) + \ln(2 - \sqrt{3}) & H &= 11 \ln 9 + 21 \ln \left(\frac{1}{3} \right) & I &= \ln(\sqrt{5}) - 3 \ln 125 \end{aligned}$$

Laquelle de ces expressions est la préférée de Paris ?

4. Simplifier les écritures littérales suivantes.

$$\begin{aligned} A &= e^{\ln(a-1) + \ln a} & B &= \ln \left(e^{\frac{1}{a}} \right) + e^{-\ln a} & C &= e^{3 \ln a} - 8 \ln(\sqrt{a}) \\ D &= \ln^2 \left(\frac{1}{2} \right) - \left(\ln \frac{1}{e} \right)^2 & E &= \ln 2 + \ln(16e) - \ln(4e^2) & F &= \ln(e\sqrt{e}) \end{aligned}$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$\begin{aligned} (E_1) : \ln(5x - 3) &= \ln x & (E_2) : \ln(-x + 2) &= \ln(2x + 5) & (E_3) : \ln(x^2 + 1) &= \ln(4x - 3) \\ (E_4) : \ln(x^2) &= \ln x + \ln 5 & (E_5) : \ln(x + 1) + \ln(x - 4) &= \ln 6 & (E_6) : 2 \ln x &= \ln(5x + 6) \\ (I_7) : \ln(7x - 1) &\geq \ln 8 & (I_8) : 3x \ln 2 &\leq \ln 32 & (I_9) : x \ln \left(\frac{1}{2} \right) &\leq -7 \end{aligned}$$

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$\begin{aligned} (E_1) : 2e^x - 3 &= 0 & (E_2) : e^{-x+1} - 1 &= 0 & (E_3) : e^{2x} &= 4 \\ (E_4) : e^{-7x+25} + 23 &= 19 & (E_5) : \ln x &= -3 & (E_6) : 2 \ln x - 1 &= 0 \\ (E_7) : (\ln x + 5)(4 \ln x - 5) &= 0 & (I_8) : \ln x &< 3 & (I_9) : 2 \ln x + 200 &> 0 \\ (I_{10}) : 1 - 2 \ln x &\geq 0 & (I_{11}) : 2 \ln x - 4 \ln 3 &< 0 & (I_{12}) : e^{-7x+25} + 23 &> 19 \end{aligned}$$

Exercice 4

Résoudre dans \mathbb{N} les inéquations suivantes.

$$(I_1) : 2^n \leq 10^6 \qquad (I_2) : \left(\frac{1}{3} \right)^n \leq 10^{-4} \qquad (I_3) : \left(\frac{2}{5} \right)^n \leq 2 \times 10^{-3} \qquad (I_4) : \left(1 + \frac{3}{100} \right)^n \geq 2$$

Exercice 5

- Déterminer les ensembles de définition des fonctions définies par les formules suivantes.
- Calculer la dérivée de chacune de ces fonctions.
- Dresser les tableaux de variations des fonctions g , j , l et n .

$$\begin{array}{lll}
 f(x) = \ln(3x - 5) & g(x) = \ln x - \ln(2 - x) & h(x) = \ln x^2 \\
 j(x) = \frac{1}{x} \ln(1 + x) & k(x) = \frac{1}{\ln x} & l(x) = \ln(x^2 + 4x) \\
 m(x) = \ln\left(\frac{x-3}{2-x}\right) & n(x) = \ln e^x - e^{\ln(x+1)} & p(x) = \ln(e^x - 1)
 \end{array}$$

Exercice 6

$$f : x \mapsto a + b \frac{\ln x}{x} \quad \mathcal{D}_f =]0; +\infty[$$

\mathcal{C}_f admet pour tangente en 1 la droite $T_1 : y = -x + 2$. Déterminer a et b .

Exercice 7

$$f : x \mapsto x + \ln(ax + b) \quad \mathcal{D}_f =]-\infty; 2, 5]$$

\mathcal{C}_f admet une tangente horizontale en $A(2; 2)$. Déterminer a et b .

Exercice 8

Dresser un tableau de variations complet de chacune des fonctions définies sur \mathbb{R}_+^* :

$$f : x \mapsto x \ln x \quad g : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad h : x \mapsto x^2 \ln x$$

Démontrer que la courbe \mathcal{C}_h admet une unique tangente passant par O et donner son équation.

Exercice 9

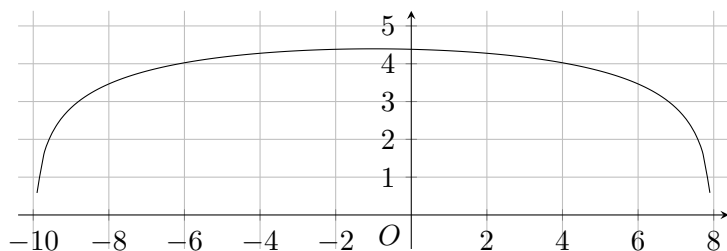
$$f : x \mapsto 2x^3 + 5x^2 + x - 2 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

- Vérifier que $f(-1) = 0$ puis en déduire une factorisation de $f(x)$.
- Résoudre $f(x) \leq 0$.
- Résoudre alors $(E) : 2 \ln x + \ln(2x + 5) \leq \ln(2 - x)$.

Exercice 10

$$f : x \mapsto \ln(x + 10) + \ln(8 - x)$$

- Déterminer \mathcal{D}_f .
- Une vieille calculatrice affiche la courbe incomplète de gauche pour \mathcal{C}_f . Mathilde conjecture alors le tableau de droite. Valider ou infirmer cette conjecture.



x	-10	-1	8
f	0	$f(-1)$	0

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Donner les solutions au millième près.

Exercice 11

La somme de 12 500 € est placée en 2025 sur un compte épargne rapportant 3,5 % par an.

- Modéliser la situation par une suite (u_n) .
- Si on ne touche pas à cet argent, en quelle année la somme placée dépassera-t-elle 30 000 €?

Exercice 12

La population d'un pays de 145 000 000 d'habitants au 1^{er} janvier 2025 décroît de 1 % par an.

- Modéliser la situation par une suite (v_n) .
- Si la baisse de population se poursuit sur le même rythme, en quelle année verra-t-on la population passer sous la barre des 100 000 000 d'habitants?

Exercice 13

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln^2 x - 2 \ln x - 3 \geq 0$.

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite résoudre dans \mathbb{R}_+^* l'équation $(E) : e^x - x^n = 0$.

- Montrer que $(E) \iff \ln x - \frac{x}{n} = 0$.
- Pour quelles valeurs de n l'équation (E) admet-elle deux solutions ?

Exercice 15

Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son domaine de définition.

$$f : x \mapsto x + a + \frac{\ln x}{x} \quad g : x \mapsto \frac{1}{x} + \ln x \quad h : x \mapsto \ln(e^x + 2) \quad k : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x + 1}{2e^x + 3}\right)$$

Exercice 16

$$g : x \mapsto \ln x + x - 3 \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$$

1. Justifier que la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α , avec $\alpha \in [2; 3]$.
3. En déduire le signe de $g(x)$ en fonction de x .

$$f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right) (\ln x - 2) + 2 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.
5. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
6. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) - \ln x = \frac{2 - \ln x}{x}$.
7. En déduire que \mathcal{C}_f et \mathcal{C} , représentant la fonction \ln , ont un seul point commun ; préciser ses coordonnées.
8. Étudier alors les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C} .
9. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \ln x}{x}$. Que peut-on dire de \mathcal{C} par rapport à \mathcal{C}_f ?

Exercice 17

$$f : x \mapsto \ln \left(x^2 + x + \frac{5}{2} \right) \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau des variations de f .
3. Étudier la convexité de f et déterminer les points d'inflexion de \mathcal{C}_f .

Exercice 18

$$f : x \mapsto \frac{\ln x}{x} \quad g : x \mapsto \frac{\ln^2 x}{x}$$

1. Faire une étude complète de la fonction g . (*variations, convexité, points d'inflexion.*)
2. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 19

$$f : x \mapsto \ln(-2x^2 + 13, 5) \quad \mathcal{D}_f = [-2, 5; 2, 5]$$

1. Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x) \geq 0$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Dresser le tableau des variations de f .
4. \mathcal{C}_f est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier.