

Exercice 1

Figure 1



Figure 2



Figure 3

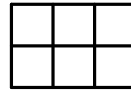


Figure 4

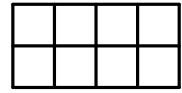


Figure n	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'allumettes N							

Exercice 2 — Nombre de Kaprekar

L'algorithme de Kaprekar est le suivant :

1. Choisir un nombre dont les chiffres sont tous différents.
2. À l'aide des chiffres composant ce nombre, écrire le nombre le plus grand possible.
3. À l'aide des chiffres composant ce nombre, écrire le nombre le plus petit possible.
4. Soustraire le nombre obtenu à l'étape 3 au nombre obtenu à l'étape 2.
5. Reprendre au début avec le résultat de la soustraction.

Exemple : on choisit les chiffres 7,1,2 et 3.

Le nombre le plus grand obtenu avec ces chiffres est 7321.

Le nombre le plus petit obtenu avec ces chiffres est 1237.

On effectue le calcul $7321-1237=6084$.

Le nombre le plus grand obtenu avec ces chiffres est 8640, le plus petit est 0468.

$8640-0468=8172$. On recommence, etc...

Questions :

- a) Essaie avec les chiffres 3,1,5 et 8. Que remarques-tu au bout de 8 étapes ?
- b) Essaie avec les chiffres 9,1,8 et 3. Que remarques-tu au bout de 8 étapes ?
- c) On peut faire de même avec des nombres composés de trois chiffres. Essaie avec les chiffres 2,1,3 puis avec 9,4,6. Que remarques-tu ?

Exercice 3 — Nombre heureux

En mathématiques, un entier naturel non nul est un **nombre heureux** si, lorsqu'on calcule la somme des carrés de ses chiffres puis la somme des carrés des chiffres du nombre obtenu et ainsi de suite, **on aboutit au nombre 1**.

Un nombre est malheureux lorsque ce n'est pas le cas.

Exemple : on choisit le nombre 7.

$7 \times 7 = 49$. On recommence avec les chiffres 4 et 9.

$4 \times 4 + 9 \times 9 = 16 + 81 = 97$. On recommence avec les chiffres 9 et 7.

$9 \times 9 + 7 \times 7 = 81 + 49 = 130$. On recommence avec les chiffres 1, 3 et 0.

$1 \times 1 + 3 \times 3 + 0 \times 0 = 1 + 9 + 0 = 10$. On recommence avec les chiffres 1 et 0.

$1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$. Le nombre 7 est heureux !

Questions :

- a) 4 est-il heureux ?
- b) 13 est-il heureux ?
- c) 356 est-il heureux ?

Exercice 4 — Suite de Syracuse (ou conjecture de Collatz)

On définit la suite de Syracuse de la façon suivante :

- On choisit un entier naturel strictement positif.
- S'il est pair, on le divise par 2.
- S'il est impair, on le multiplie par 3 puis on ajoute 1.
- On recommence avec le nombre obtenu.

Exemple : on choisit le nombre 7.

7 est impair. $7 \times 3 + 1 = 21 + 1 = 22$.

22 est pair. $22 \div 2 = 11$. En continuant le processus, on obtient :

$7 \rightarrow 22 \rightarrow 11 \rightarrow 34 \rightarrow 17 \rightarrow 52 \rightarrow 26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

Questions :

- Calculer la suite de Syracuse en partant de 10.
- Calculer la suite de Syracuse en partant de 15.
- Que remarque-t-on lorsque l'on atteint le nombre 1 ?

Exercice 5 — Nombres narcissiques (ou nombres d'Armstrong)

Un entier naturel est appelé **nombre narcissique** si la somme de ses chiffres élevés à la puissance du nombre de chiffres est égale au nombre lui-même.

Exemple : $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$

Questions :

- Vérifier que 370 est un nombre narcissique.
- Le nombre 371 est-il narcissique ?
- Trouver tous les nombres narcissiques à trois chiffres (il y en a 4 en tout).

Exercice 6 — Procédé « retourner et additionner »

On choisit un entier naturel.

- On écrit le nombre à l'envers.
- On additionne le nombre et son retourné.
- On recommence avec le résultat obtenu.

Exemple : on part de 56.

$56 + 65 = 121$ (on obtient alors un palindrome)

Questions :

- Appliquer ce procédé en partant de 87.
- Appliquer ce procédé en partant de 89 (24 étapes).

Exercice 7 — Nombres automorphes

Un nombre est dit **automorphe** si son carré se termine par le nombre lui-même.

Exemple : $25^2 = 625$ (le carré se termine par 25)

Questions :

- Vérifier que 76 est un nombre automorphe.
- Le nombre 10 est-il automorphe ?
- Trouver tous les nombres automorphes inférieurs à 100, en raisonnant par élimination par exemple.