Exercice 1. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. En déduire l'écriture explicite de $g(x)$.
3. Conclure sur f.

Exercice 2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} g(0) = 1, \\ g'(x) = g(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. D'après l'exercice 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \neq 0$.

1. Déterminer $h'(x)$.
2. En déduire l'écriture explicite de $h(x)$.
3. Conclure sur f et g.

Exercice 3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soit y un réel. Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{f(x+y)}{f(x)}$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. En déduire l'écriture explicite de $g(x)$.
3. Conclure sur f.

Exercice 4. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ f'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$. *On pourra utiliser les résultats des exercices précédents.*

Exercice 5. Simplifier au maximum les écritures des nombres suivants.

$$A = e^3\, e^4 \qquad B = e^7\, e^3 \qquad C = e^1 e^8 \qquad D = e\, e^6$$

$$E = e^2\, e^5 + e^7 \qquad F = \frac{e^{10}}{e^8} \qquad G = \frac{e^5}{e^9} \qquad H = \frac{e^4\, e^6}{e^2}$$

$$I = \frac{e^5\, e^2}{e^6} - e^9\, e^{11} \qquad J = e^6\left(e^2 + e^5 - 3\right) \qquad K = 3e^2\, e^8 \qquad L = 3 + e^3\, e^4$$

$$M = 2\,\frac{e^5\, e^6}{e^3} \qquad N = \left(e^3\right)^4 \qquad P = \left(e^2\right)^3 e^5 \qquad Q = \frac{\left(e^4\right)^3 \times e^{-24}}{e^{-12}}$$

Exercice 6. Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = e^{3x+2}\, e^2 \qquad B = e^{12}\, e^{6+3x} \qquad C = e^{4x-2}\, e^{5-2x} \qquad D = e^{x^2+2x-3}\, e^{-x^2-x}$$

$$E = e^{x^2+2x-3}\, e^{-x^2} - x \qquad F = \frac{e^{x-5}}{e^{x-4}} \qquad G = \frac{e^{x-5}\, e^{2-2x}}{e^{x-4}} \qquad H = \frac{e^{2x}\, e^{-2x}}{e^4}$$

$$I = 2\,\frac{e^{x-5}\, e^{2-2x}}{e^{x-4}} + 3e^{5x} \qquad J = \frac{\left(e^{2x}\right)^3}{e^5} \qquad K = \frac{e^x}{e^{-2}} + 3 + 4\,e^{2x}\, e^{5x} \qquad L = \frac{e^{5x+1}\, e^{-2x}}{e^{-x+2}}$$

Exercice 7. Factoriser au maximum les expressions suivantes.

$$A = e^x + 5\,e^x \qquad B = x\,e^{2x} + 3\,e^{2x} \qquad C = 2x\,e^{3x} - 2\,e^{3x} + 6\,e^{3x}$$

$$D = x\,e^x + e^x \qquad E = (x+1)\,e^{3x+1} - 2\,e^{3x+1} \qquad F = 5\,e^{5x-3} + (2x+6)\,e^{5x-3}$$

$$G = 4\,e^{2x} - 5\,e^{3x+1} \qquad H = 2\,(x+3)\,e^{3x} - 5\,e^{3x} \qquad I = e^{2x+1} - 2\,(x+4)\,e^{2x+1}$$

$$J = (e^x)^2 - 3\,e^{2x} \qquad K = (3\,x\,e^x)^3 + 2\,e^{3x}$$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$(E_1) \;:\; e^{3x-9} = 1 \qquad (E_2) \;:\; e^x = e^{2x-1} \qquad (E_3) \;:\; e^{6-x} - e^{5x} = 0$$

$$(E_4) \;:\; 1 - e^{6x} = 0 \qquad (E_5) \;:\; e^{2x^2-x-4} - e^{-x^2+2x+2} = 0 \qquad (E_6) \;:\; e^{x^2+3x-10} = 1$$

$$(I_1) \;:\; e^{3\,x-9} \leqslant 1 \qquad (I_2) \;:\; e^{2x} > e^{x-1} \qquad (I_3) \;:\; e^{9-3\,x} - e^{4\,x} \geqslant 0$$

$$(I_4) \;:\; 1 - e^{5-x} < 0 \qquad (I_5) \;:\; e^{x^2+x-1} - e^{-6\,x-11} \geqslant 0 \qquad (I_6) \;:\; e^{\frac{x+1}{x-1}} \geqslant \frac{1}{e}$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations « produits » suivantes.

$$(E_1) \quad (2\,x+1)\,e^{3\,x+1} = 0 \qquad (E_2) \quad (5\,x-10)\,e^{9-x} = 0 \qquad (E_3) \quad (2\,x+4)\,e^x - 3\,e^x = 0$$

$$(I_4) \quad (6-x)\,e^{6\,x} > 0 \qquad (I_5) \quad 6\,x\,e^{x-1} < 3\,e^{x-1} \qquad (I_6) \quad \left(x^2-1\right)\,e^{2\,x} \leqslant 0$$