

I) Notations

En mathématiques, il est habituel de nommer des nombres par des lettres. Un nombre inconnu est souvent noté x , un nombre entier inconnu est souvent noté n .

Exercice

$3 \times x + y + 7 \times x \times x$ est une expression littérale dans laquelle x et y remplacent des nombres, inconnus pour l'instant.

Calculer cette expression pour $x = 3$ et $y = 10$.

Notation

— Par convention, on peut ne pas écrire le signe « $\times$ » devant une lettre ou une parenthèse. Par exemple :

$$3 \times x = 3x$$

$$7 \times (2 + 3 \times x) = 7(2 + 3x)$$

— Produits d'un même facteur : $x \times x = x^2$ et $x \times x \times x = x^3$.

x^2 se prononce « x au carré ». x^3 se prononce « x au cube ».

II) Simplifications d'écriture et opérations

Méthode

Pour marquer la priorité de la multiplication, le symbole « $\times$ » peut être enlevé dans certains cas :

$$3 \times a \text{ s'écrit } 3a$$

$$a \times b \text{ s'écrit } ab$$

$$4 \times (a - 2) \text{ s'écrit } 4(a - 2)$$

Remarque

2×3 ne s'écrit pas 23

On écrit $2a$, mais on n'écrit pas $a2$: le nombre s'écrit toujours devant la lettre dans un produit.

Additions, soustractions	Multiplications
$3x + 7$ ne se réduit pas	$3 \times x = 3x$
$3x + 7x = 10x$	$3x \times 7 = 21x$
$3x - 7x = -4x$	$3x \times 7x = 21x^2$
$3x^2 + 7x$ ne se réduit pas	$x \times 4 = 4x$
$3x^2 + 7x^2 = 10x^2$	$3x^2 \times 7x = 21x^3$
$3x + 7y$ ne se réduit pas	$3x \times 7y = 21xy$

Exercice

Simplifier le plus possible l'écriture des expressions suivantes :

$$2 \times x$$

$$5 \times a + 3 \times b$$

$$4 \times 5 - 7 \times a + a$$

$$y \times 3$$

$$x \times y$$

$$3x + 4 + 6x$$

$$a \times b \times c$$

$$4 \times 5 + 5 \times a$$

$$c \times c \times c$$

$$4 \times a \times 5$$

$$a \times b - c \times d$$

$$2y + y$$

$$4 - 3 \times a$$

$$2 \times \pi \times r$$

$$3 \times x \times 3$$

$$5 - x \times 3$$

$$a + a + a$$

$$a + b + a$$

III) Équations

Vocabulaire

Inconnue : c'est une lettre qui cache un nombre cherché.

Équation : c'est une égalité qui contient au moins une inconnue.

Par exemple : $4x + 6 = 2x + 8$.

Résoudre une équation : c'est chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue.

Solution : c'est le nombre caché sous l'inconnue. Ici, il s'agit de $x = 1$.

Exemples

Voici différentes équations.

$$a) \quad 7x + 2 = 3x + 12 \quad b) \quad 8x^2 = 9x - 3 \quad c) \quad 17x - 20 = 8x + 88$$

$$d) \quad 3xy = 5x^2 - 3y \quad e) \quad 9x - (x + 5)^2 = 12 \quad f) \quad 37 - 97x = 3x - 20$$

En S1, on s'intéressera uniquement aux équations du 1^{er} degré à une inconnue. Dans la liste ci-dessus, il s'agit des exemples a), c) et f).

Remarque

Une équation du 1^{er} degré à une inconnue admet soit une unique solution, soit aucune solution, soit une infinité de solutions. Nous étudierons surtout les équations du premier degré ayant exactement une solution.

IV) Tests d'égalités

Méthode

Tester une égalité dans laquelle apparaît un nombre inconnu, généralement x , c'est calculer séparément les deux membres de l'égalité en remplaçant x par une valeur donnée, et comparer.

Exemple

2,5 est la solution de l'équation $7x + 2 = 3x + 12$. En effet, pour $x = 2,5$:

$$\begin{array}{ll} \text{D'une part : } 7x + 2 = 7 \times 2,5 + 2 & \text{D'autre part : } 3x + 12 = 3 \times 2,5 + 12 \\ & = 19,5 \end{array}$$

Ainsi, pour $x = 2,5$, on a bien $7x + 2 = 3x + 12$.

Ceci n'est qu'une vérification qu'un nombre est solution d'une équation.

Exercice

Tester l'égalité $3x^2 + 5x - 2 = 11x + 7$

- a) Pour $x = 2$.
- b) Pour $x = 3$.

V) Résolution d'une équation du premier degré à une inconnue

Propriété

- Lorsque l'on ajoute ou que l'on soustrait un même nombre aux deux membres d'une égalité, on obtient une nouvelle égalité.
- Lorsque l'on multiplie ou que l'on divise les deux membres d'une égalité par un même nombre non nul, on obtient une nouvelle égalité.

Exemples

1. Considérons l'équation $4x + 20 = 9x - 38$. On peut ajouter 25 à chaque membre de l'égalité.

$$\text{On obtient alors :} \quad 4x + 20 + 25 = 9x - 38 + 25$$

$$\text{Ce qui donne :} \quad 4x + 45 = 9x - 13$$

Les équations $4x + 20 = 9x - 38$ et $4x + 45 = 9x - 13$ sont équivalentes.

2. Considérons l'équation $12x = 36$. On peut diviser chaque membre de l'égalité par 3.

$$\text{On obtient alors :} \quad \frac{12x}{3} = \frac{36}{3}$$

$$\text{Ce qui donne :} \quad 4x = 12$$

Les équations $12x = 36$ et $4x = 12$ sont équivalentes.

Remarque

- Les opérations effectuées sur chaque membre des deux équations précédentes n'ont pas vraiment d'intérêt. Il s'agira de choisir d'effectuer des opérations intéressantes.
- L'idée est d'effectuer des opérations identiques sur chaque membre d'une égalité pour obtenir de nouvelles égalités successives de plus en plus simples jusqu'à obtenir une égalité du type « $x = \text{un nombre}$ ».

Exemple

Pour résoudre l'équation $17x - 20 = 8x + 88$, on peut procéder comme ci-dessous.

$$17x - 20 = 8x + 88$$

$$17x - 20 + 20 = 8x + 88 + 20 \quad \text{Objectif : aucun terme sans } x \text{ à gauche du } =$$

$$17x = 8x + 108 \quad \text{C'est fait.}$$

$$17x - 8x = 8x + 108 - 8x \quad \text{Objectif : aucun terme en } x \text{ à droite du } =$$

$$9x = 108 \quad \text{C'est fait, et on a bien progressé.}$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{108}{9}$$

Objectif : Isoler x

$$x = 12$$

Objectif global atteint ; l'équation est résolue.

12 est la solution de l'équation $17x - 20 = 8x + 88$. C'est facile à vérifier.

$$\begin{aligned} 17 \times 12 - 20 &= 204 - 20 \\ &= 184 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \times 12 + 88 &= 96 + 88 \\ &= 184 \end{aligned}$$