Comment fait (à peu près) la calculatrice pour calculer une valeur de cosinus (ou de sinus) ?

Vous avez vu aujourd'hui le très joli livre que j'ai apporté avec des tables de valeurs du cosinus, du sinus, etc. Bien évidemment, ces valeurs ne sont pas enregistrées dans la calculatrice.

1 Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ à l'aide du développement en série de Taylor

Une jolie formule (hors programme en S6) nous dit que :

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

En remplaçant par exemple x par $\dfrac{\pi}{4}$, cela nous donne :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} + \cdots$$

J'ai calculé les termes avec un fx-92 collège, en remplaçant x par $\dfrac{\pi}{4}$, et je trouve (sauf erreur de lecture de ma part) :

Avec deux termes seulement dans la série :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} \approx 0{,}6916$ (j'ai arrondi à 4 chiffres après la virgule)

Avec trois termes dans la série :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} \approx 0{,}707429$ (j'ai arrondi à 6 chiffres après la virgule)

Avec quatre termes dans la série :

$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{6!} \approx 0{,}707107$ (j'ai arrondi à 6 chiffres après la virgule)

On sait que : $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et la calculatrice nous dit que $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70710678$ (on peut d'ailleurs se poser la question suivante : comment la calculatrice trouve t-elle une valeur approchée de $\sqrt{2}$? Voir paragraphe suivant).

La valeur obtenue par la série de Taylor est donc une très bonne approximation de la valeur exacte.
Après lecture de la documentation, j'apprends que la calculatrice n'utilise pas exactement cette série de Taylor, mais l'idée générale est la même.

Calcul d'une valeur approchée de $\sqrt{2}$: méthode de Newton

Pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$, la calculatrice cherche un nombre x tel que : $x^2 = 2$ ce qui revient à résoudre l'équation : $x^2 - 2 = 0$.

Comme je ne veux pas m'étendre ici, et sans m'étendre sur la méthode de Newton, nous avons déjà vu dans le passé que la suite suivante converge vers $\sqrt{2}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), x_0 = 1$$

Calculs successifs

On choisit une valeur initiale simple, par exemple $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = 1{,}5 \\
x_2 &= \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) \approx 1{,}4167 \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(1{,}4167 + \frac{2}{1{,}4167}\right) \approx 1{,}414215 \\
x_4 &\approx 1{,}41421356
\end{aligned}$$

Après seulement quelques itérations, on obtient une valeur très proche de :

$$\sqrt{2} \approx 1{,}41421356$$