

Exercice 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. En déduire l'écriture explicite de $g(x)$.
3. Conclure sur f .

Exercice 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} g(0) = 1 \\ g'(x) = g(x) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit h la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. D'après l'exercice 1 : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \neq 0$.

1. Déterminer $h'(x)$.
2. En déduire l'écriture explicite de $h(x)$.
3. Conclure sur f et g .

Exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Soit y un réel. Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. En déduire l'écriture explicite de $g(x)$.
3. Conclure sur f .

Exercice 4

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \end{cases}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ On pourra utiliser les résultats des exercices précédents.

Exercice 5

Simplifier au maximum les écritures des nombres suivants.

$$A = e^3 e^4$$

$$B = e^7 e^3$$

$$C = e^1 e^8$$

$$D = e e^6$$

$$E = e^2 e^5 + e^7$$

$$F = \frac{e^{10}}{e^8}$$

$$G = \frac{e^5}{e^9}$$

$$H = \frac{e^4 e^6}{e^2}$$

$$I = \frac{e^5 e^2}{e^6} - e^9 e^{11}$$

$$J = e^6 (e^2 + e^5 - 3)$$

$$K = 3e^2 e^8$$

$$L = 3 + e^3 e^4$$

$$M = 2 \frac{e^5 e^6}{e^3}$$

$$N = (e^3)^4$$

$$P = (e^2)^3 e^5$$

$$Q = \frac{(e^4)^3 \times e^{-24}}{e^{-12}}$$

Exercice 6

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

$$A = e^{3x+2} e^2$$

$$B = e^{12} e^{6+3x}$$

$$C = e^{4x-2} e^{5-2x}$$

$$D = e^{x^2+2x-3} e^{-x^2-x}$$

$$E = e^{x^2+2x-3} e^{-x^2} - x$$

$$F = \frac{e^{x-5}}{e^{x-4}}$$

$$G = \frac{e^{x-5} e^{2-2x}}{e^{x-4}}$$

$$H = \frac{e^{2x} e^{-2x}}{e^4}$$

$$I = 2 \frac{e^{x-5} e^{2-2x}}{e^{x-4}} + 3e^{5x}$$

$$J = \frac{(e^{2x})^3}{e^5}$$

$$K = \frac{e^x}{e^{-2}} + 3 + 4e^{2x} e^{5x}$$

$$L = \frac{e^{5x+1} e^{-2x}}{e^{-x+2}}$$

Exercice 7

Factoriser au maximum les expressions suivantes.

$$A = e^x + 5e^x$$

$$B = x e^{2x} + 3e^{2x}$$

$$C = 2x e^{3x} - 2e^{3x} + 6e^{3x}$$

$$D = x e^x + e^x$$

$$E = (x+1) e^{3x+1} - 2e^{3x+1}$$

$$F = 5e^{5x-3} + (2x+6) e^{5x-3}$$

$$G = 4e^{2x} - 5e^{3x+1}$$

$$H = 2(x+3) e^{3x} - 5e^{3x}$$

$$I = e^{2x+1} - 2(x+4) e^{2x+1}$$

$$J = (e^x)^2 - 3e^{2x}$$

$$K = (3x e^x)^3 + 2e^{3x}$$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

$$(E_1) : e^{3x-9} = 1$$

$$(E_2) : e^x = e^{2x-1}$$

$$(E_3) : e^{6-x} - e^{5x} = 0$$

$$(E_4) : 1 - e^{6x} = 0$$

$$(E_5) : e^{2x^2-x-4} - e^{-x^2+2x+2} = 0$$

$$(E_6) : e^{x^2+3x-10} = 1$$

$$(I_1) : e^{3x-9} \leq 1$$

$$(I_2) : e^{2x} > e^{x-1}$$

$$(I_3) : e^{9-3x} - e^{4x} \geq 0$$

$$(I_4) : 1 - e^{5-x} < 0$$

$$(I_5) : e^{x^2+x-1} - e^{-6x-11} \geq 0$$

$$(I_6) : e^{\frac{x+1}{x-1}} \geq \frac{1}{e}$$

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations « produits » suivantes.

$$(E_1) \quad (2x+1) e^{3x+1} = 0$$

$$(E_2) \quad (5x-10) e^{9-x} = 0$$

$$(E_3) \quad (2x+4) e^x - 3e^x = 0$$

$$(I_4) \quad (6-x) e^{6x} > 0$$

$$(I_5) \quad 6x e^{x-1} < 3e^{x-1}$$

$$(I_6) \quad (x^2-1) e^{2x} \leq 0$$

Exercice 10

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

$$(E_1) : 4e^{2x} + 4e^x - 8 = 0$$

$$(E_2) : e^x = 4e^{-x} - 3$$

Exercice 11

Donner, sans faire de calculs, le signe des fonctions f , g , h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + 1$$

$$g(x) = -3 - e^{2x}$$

$$h(x) = x^2 + e^{-x}$$

$$k(x) = \frac{x^2 e^{-x}}{x^2 + 1}$$

Exercice 12

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

$$f(x) = e^{3x}$$

$$g(x) = 4e^{5x+1}$$

$$h(x) = 3xe^{4-x}$$

$$j(x) = (2x + 5)e^x$$

$$k(x) = (6 - 3x)e^{2x+15}$$

$$l(x) = e^{2x} + 2e^{5x+6}$$

$$m(x) = 3x + 5e^{3-2x}$$

$$n(x) = x - 4e^{8x+3}$$

$$p(x) = (1 - x^2)e^{-x} + 5$$

$$q(x) = \frac{2e^x}{e^x + 1}$$

$$r(x) = \frac{5e^{3x-2}}{4x + e^{5-6x}}$$

$$s(x) = 4xe^{4x^2-3x+1}$$

Exercice 13

Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 5e^{3n}$.

1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Exprimer pour tout entier naturel n , u_{n+1} en fonction de u_n . Que peut-on en déduire?

Exercice 14

Dans le repère ci-dessous sont tracées les courbes des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont les expressions sont ci-dessous. Identifier chacune des courbes sur le graphique.

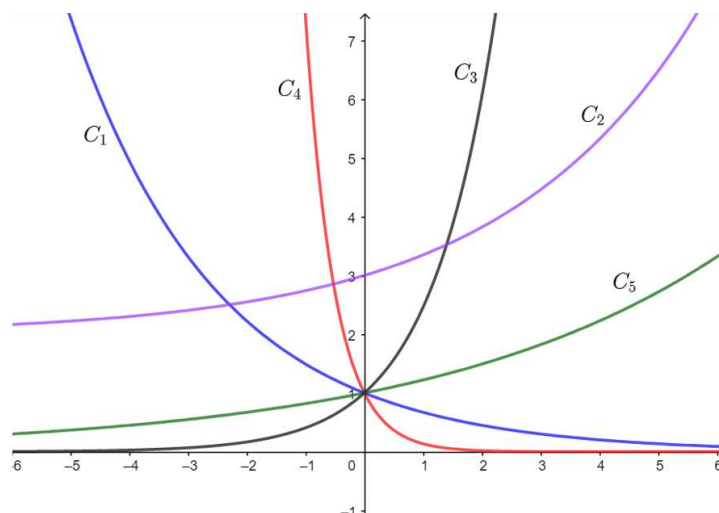
a) $f(x) = e^{0,2x}$

b) $g(x) = e^{-0,4x}$

c) $h(x) = 2 + e^{0,3x}$

d) $t(x) = e^{0,9x}$

e) $u(x) = e^{-2x}$



Exercice 15

$$f : x \mapsto e^x - x \quad D_f = \mathbb{R}$$

1. Dresser le tableau de variations de f .
2. En déduire le signe de $f(x)$ et comparer e^x et x .
3. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ puis $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.

Exercice 16

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 1} \quad D_f = \mathbb{R}$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 17

Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

$$f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad g : x \mapsto \frac{3e^x}{e^{2x} + 1} \quad h : x \mapsto e^{-2x} (3x^2 - 4x + 1)$$

Exercice 18

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto a e^{bx}$. On sait de plus que $f(0) = 4$ et $f'(0) = 2$. Déterminer $f(x)$.

Exercice 19

On considère la famille de fonctions g_n pour $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = \frac{e^{nx}}{1 + e^x}$

1. Esquisser la représentation graphique $\mathcal{C}_0$ de g_0 dans un repère.
2. Montrer que $g_1(x) = g_0(-x)$. Interpréter graphiquement et esquisser $\mathcal{C}_1$ dans le même repère.
3. Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ ont un point commun A dont on donnera les coordonnées.

Exercice 20

$$f : x \mapsto 6x e^{-\frac{x}{2}} \quad D_f = \mathbb{R}$$

1. Dresser le tableau de variations complet de f .
2. Résoudre alors $f(x) = 0$. Interpréter graphiquement.
3. Donner les éventuelles asymptotes verticales et horizontales de $\mathcal{C}_f$.
4. Donner les éventuels extrema de f .
5. Étudier la convexité de f et déterminer les éventuels points d'inflexions de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 21

Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte. Trouvez-la.

1. L'inéquation $e^{-2x} > 0$ d'inconnue x a pour ensemble de solutions :

a) $\mathbb{R}$ b) $]0; +\infty[$ c) $] -\infty; 0[$ d) $\emptyset$

2. Pour tout réel x , $(e^x - 1)^2$ est égal à :

a) $e^{2x} - 1$ b) $e^{2x} + 1$ c) $e^{2x} - 2e^x + 1$ d) $e^{x^2} - 1$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{5x-1}$. Pour tout réel x , $f'(x)$ est égal à :

a) e^{5x-1} b) $5e^{5x}$ c) $5e^{5x-1}$ d) $5xe^{5x-1}$

4. L'inéquation $-3e^{x+2} > -3e^4$, d'inconnue x , a pour ensemble de solutions :

a) $] -2; +\infty[$ b) $]2; +\infty[$ c) $] -\infty; 2[$ d) $] -\infty; -2[$

5. $\frac{e^{5x}}{e^{2x-2}} =$

a) e^{3x+2} b) e^{3x-2} c) $e^{2,5x-2,5}$ d) e^{7x-2}

6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x}$. Une autre expression de f est :

a) $\frac{e^{-x}}{-x}$ b) xe^{-x} c) $-xe^{-x}$ d) $\frac{e^{-x}}{x}$

7. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 5)e^x$. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée. Alors pour tout réel x , $g'(x)$ est égal à :

a) $(2x - 3)e^x$ b) $(-2x + 7)e^x$ c) $2e^x$ d) $-5e^x$

Exercice 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe de la fonction f .

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1$$

- Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
 - Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 - Justifier que, pour tout réel x , $e^x - x > 0$.
2. Étudier le sens de variation de f , et dresser le tableau de variations de f .
3. On note T_0 la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Déterminer l'équation réduite de T_0 .
 - Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_0 .

Exercice 23

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[-5; 5]$ par : $g(x) = e^x - x + 1$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $[-5; 5]$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[-5; 5]$.
3. Donner le signe de $g(x)$ sur $[-5; 5]$.

Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$

On appelle $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. On admet que f est dérivable sur $[-5; 5]$.

4. Démontrer que pour tout réel x de $[-5; 5]$: $f'(x) = \frac{1}{e^x} \times g(x)$

En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5; 5]$.

5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0.

Exercice 24

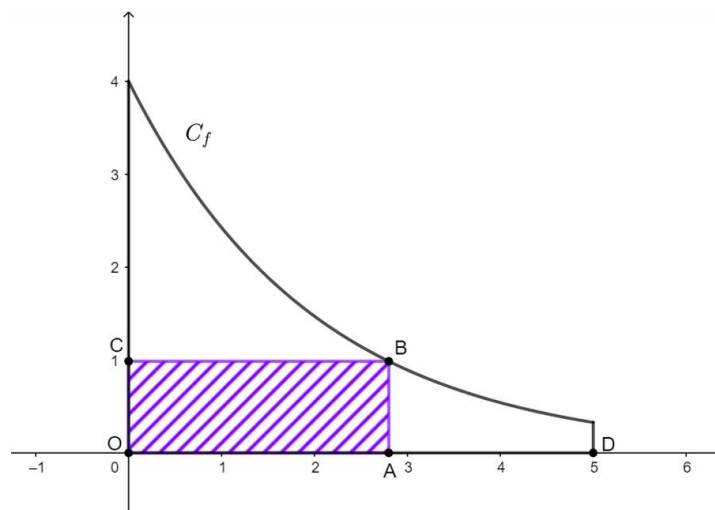
Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain. Dans le repère orthonormé, d'unité le mètre, ci-dessous, le terrain est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0; 5]$ par :

$$f(x) = 4e^{-0,5x}$$

L'enclos est représenté par le rectangle $OABC$ où O est l'origine du repère et B un point de $\mathcal{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5; 0)$.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment $[OD]$ permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.



1. Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2 , est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x appartenant à $[0; 5]$.
2. La fonction g est dérivable sur $[0; 5]$.
Montrer que, pour tout réel x de $[0; 5]$, on a $g'(x) = (4 - 2x)e^{-0,5x}$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0; 5]$.
4. Où doit-on placer le point A sur $[OD]$ pour obtenir une superficie d'enclos maximale?
Donner alors la superficie maximale possible en arrondissant au dm^2 .

Exercice 25

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L) peut être modélisée par la fonction f , définie sur l'intervalle $[0; 10]$, où x est le temps exprimé en heure, par :

$$f(x) = \frac{6x}{e^x}$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.



1. Montrer que : $\forall x \in [0; 10], \quad f'(x) = \frac{6 - 6x}{e^x}$
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 10]$.
3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ?
On donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près.
Au bout de combien de temps cette concentration maximale est-elle atteinte ?
4. Ce produit fait l'objet d'une réglementation par la fédération sportive. Un sportif est en infraction si au moment du contrôle la concentration dans le sang du produit est supérieure à 2 mg/L .
Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer en vous basant sur l'étude de la fonction et/ou une lecture graphique sur la courbe $\mathcal{C}$.

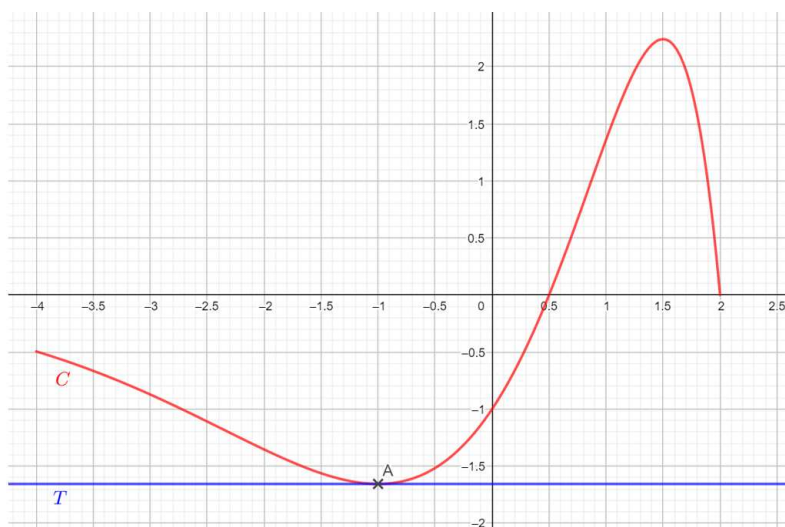
Exercice 26

Dans le repère orthonormé ci-contre, la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction f définie et dérivable sur $[-4; 2]$.

Le point A est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse -1 . La droite T est la tangente à $\mathcal{C}$ en A .

1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f'(-1)$.
2. Résoudre, graphiquement, l'inéquation :

$$f'(x) \leq 0$$

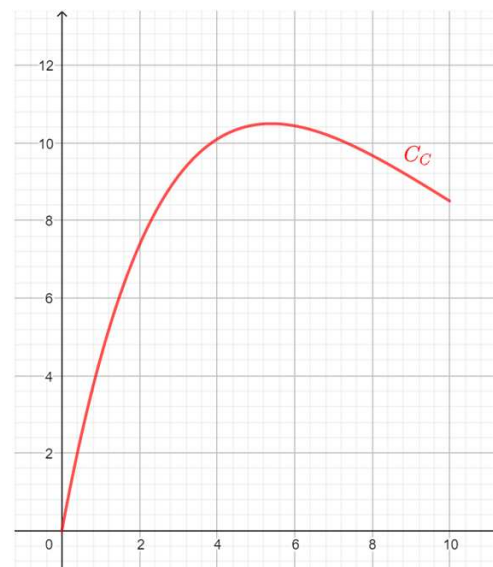


On admet maintenant que la fonction f est définie sur $[-4; 2]$ par : $f(x) = (-x^2 + 2,5x - 1)e^x$

3. Étudier algébriquement les variations de f sur $[-4; 2]$.

Exercice 27

Une entreprise fabrique chaque jour x tonnes d'un produit. Le coût de production mensuel, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par : $C(x) = (5x - 2)e^{-0,2x} + 2$. On a représenté ci-contre la courbe C_C de la fonction C dans un repère.



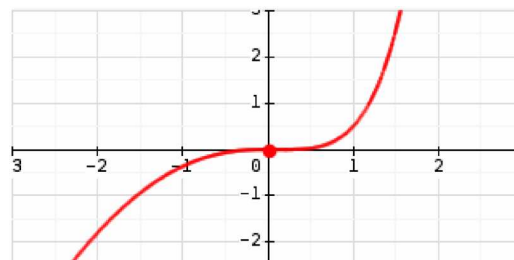
1. Par lecture graphique, donner une estimation de la quantité journalière de produit pour laquelle le coût total mensuel est maximal.
2. Le coût marginal C_m , qui correspond au supplément de coût total pour la production d'une unité de valeur supplémentaire, est assimilé à la dérivée de la fonction coût total.
 - a) Déterminer le coût marginal $C_m(x)$.
 - b) Pour quelle quantité de produit fabriqué par jour le coût marginal est-il négatif?
 - c) Dresser le tableau de variations de C sur $[0; 10]$.
 - d) Donner le coût mensuel maximal sur l'intervalle considéré.
Arrondir à l'euro près.

Exercice 28

On considère la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

Ci-contre, une partie de sa représentation graphique.

**Partie A – Conjectures**

Que penser : a) du sens de variation de f sur $[-10; 10]$? b) de la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe (Ox) ?

Partie B – Validation ou non de la première conjecture

1. Soit $g : x \mapsto (x + 2)e^{x-1} - 1$ définie sur $[-10; 10]$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
2. Dresser le tableau de variations de g .
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution (notons la α). Montrer que $0,2 < \alpha < 0,21$.
4. Dresser alors le tableau de signes de $g(x)$ puis le tableau de variations de f . Conclure.

Partie C – Validation ou non de la seconde conjecture

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{-\alpha^3}{2(\alpha + 2)}$.
2. Soit $h : x \mapsto \frac{-x^3}{2(x + 2)}$ définie sur $[0; 1]$. Dresser le tableau de variations de h .
3. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
4. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'intersection avec l'axe des abscisses. On notera β l'abscisse de celle qu'on ne sait pas (encore) déterminer par le calcul.
5. Préciser alors la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses. Conclure.