

Fonction exponentielle

1. Définition et notation

Définition 1 – (et propriété)

La **fonction exponentielle** est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

La fonction exponentielle est notée $\exp$.

Remarques

- Avec la notation $\exp$: pour tout réel x , $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
- La preuve de l'unicité a été faite avec l'exercice 2 de la fiche d'exercices.

2. Propriétés

a) Propriétés algébriques

Propriété 1

Pour tout réel x : $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$. *(Preuve : exercice 1 de la fiche d'exercices)*

Remarque

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \neq 0$.

Propriété 2 – Relation fonctionnelle

Pour tout réel x et pour tout réel y : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$. *(Preuve : exercice 3)*

Propriété 3

Pour tout réel x , pour tout réel y et pour tout entier naturel n :

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \qquad \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \qquad \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

Remarque

Les démonstrations ont été faites ou sont évidentes pour les deux premières.
La troisième se montre par récurrence.

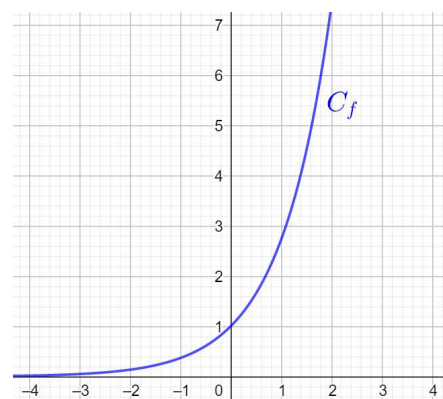
b) Variations - Courbe représentative

Propriété 4

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
(Preuve : exercice 4)

Propriété 5

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Notation e^x

Définition 2

- On note e le nombre réel égal à $\exp(1)$.
- Pour tout réel x , on note e^x le nombre réel égal à $\exp(x)$.

Remarques

- $e \approx 2,71828$.
- Cette notation est cohérente avec les propriétés algébriques vues précédemment, qui sont les propriétés déjà connues sur les puissances.

Propriété 6 – avec la notation e^x

Pour tout réel x , pour tout réel y et pour tout entier naturel n :

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| • $e^0 = 1$ | • $e^x > 0$ | • $e^{x+y} = e^x \times e^y$ |
| • $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ | • $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ | • $e^{nx} = (e^x)^n$ |

4. Résolutions d'équations et d'inéquations

Propriété 7 – Conséquences de la stricte croissance de $\exp$ sur $\mathbb{R}$

Pour tout réel x et pour tout réel y :

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| • $e^x = e^y \iff x = y$ | • $e^x < e^y \iff x < y$ |
|--------------------------|--------------------------|

Exemple de résolution

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{3x+6} - 1 > 0$

$$\begin{aligned}
 e^{3x+6} - 1 > 0 &\iff e^{3x+6} > 1 \\
 &\iff e^{3x+6} > e^0 \\
 &\iff 3x + 6 > 0 && \text{car } \exp \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\
 &\iff 3x > -6 \\
 &\iff x > -2 && \mathcal{S} =]-2; +\infty[
 \end{aligned}$$

5. Dérivation d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$

Théorème 1

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et f la fonction définie sur I par $f(x) = e^{u(x)}$.
 f est dérivable sur I et pour tout x de I : $f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{5x+4}$.

Déterminer sa fonction dérivée et étudier ses variations.

6. Limites

a) Fonction exponentielle

Propriété 8

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

b) Croissances comparées

Propriété 9

On dit que « l'exponentielle l'emporte sur toute puissance naturelle ». Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall a > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{ax} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = +\infty$$

Application

Déterminer les limites suivantes.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}(2x^2 - 3x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x}(-4x^2 + 12)$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

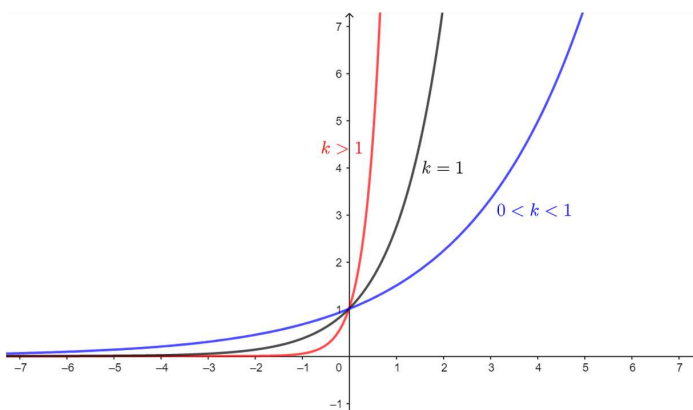
$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par limite de quotient, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0^+$$

$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 - 3x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty \end{array} \right\} \text{ Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x}(2x^2 - 3x + 1) = 0^+$$

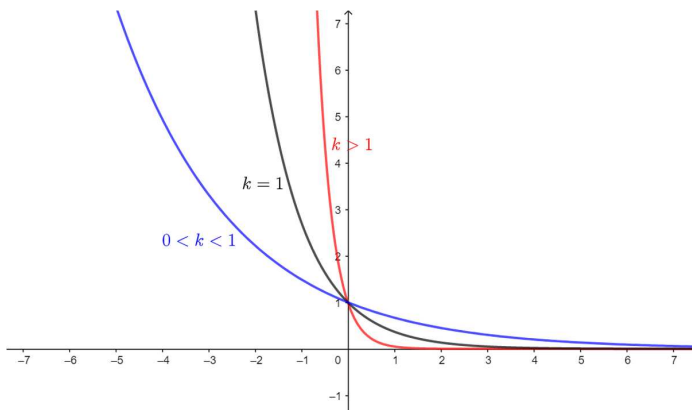
$$\bullet \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 + 12 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 = -\infty \end{array} \right\} \text{ Par limite de produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x}(-4x^2 + 12) = -\infty$$

7. Courbes représentatives des fonctions $x \mapsto e^{kx}$

Représentations graphiques des fonctions de la forme $x \mapsto e^{kx}$ avec $k > 0$:



Représentations graphiques des fonctions de la forme $x \mapsto e^{-kx}$ avec $k > 0$:



Remarque

Les fonctions exponentielles de base a , $a > 0$, $x \mapsto a^x$ sont de telles fonctions.

Par exemple $e^{0,693\,147\,181\,x} \approx 2^x$ car $e^{0,693\,147\,181\,x} = (e^{0,693\,147\,181})^x$ et $e^{0,693\,147\,181} \approx 2$

Remarque

De même que π , le nombre e est irrationnel et transcendant.

Dire que e est irrationnel signifie que e ne peut **pas** s'écrire sous la forme

$$e = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p, q \in \mathbb{Z} \text{ et } q \neq 0.$$

Autrement dit, $e \notin \mathbb{Q}$: son écriture décimale est infinie et non périodique.

Dire que e est transcendant signifie que e n'est solution **d'aucune** équation polynomiale non nulle à coefficients entiers (ou rationnels), c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0,$$

tel que

$$P(e) = 0.$$

On dit alors que e n'est pas *algébrique*.

Lien entre les deux :

$$\text{transcendant} \implies \text{irrationnel}.$$

(Mais l'inverse est faux : par exemple $\sqrt{2}$ est irrationnel mais algébrique car $\sqrt{2}$ vérifie $x^2 - 2 = 0$.)

8. Quelques démonstrations supplémentaires

Preuve de la propriété 7 :

Pour tout réel x et pour tout réel y :

$$\bullet \quad e^x = e^y \iff x = y \quad \bullet \quad e^x < e^y \iff x < y$$

Démonstration : On utilise que l'exponentielle est strictement positive : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t > 0$.

1) Égalité.

$$e^x = e^y \iff \frac{e^x}{e^y} = 1 \iff e^{x-y} = 1.$$

Or, on sait que $e^u = 1 \iff u = 0$ (car $e^0 = 1$ et l'exponentielle est strictement croissante). Donc

$$e^{x-y} = 1 \iff x - y = 0 \iff x = y.$$

La réciproque est immédiate : si $x = y$, alors $e^x = e^y$.

2) Inégalité stricte.

$$e^x < e^y \iff \frac{e^x}{e^y} < 1 \iff e^{x-y} < 1.$$

Posons $u = x - y$. Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante et $e^0 = 1$, on a

$$e^u < 1 \iff u < 0.$$

Ainsi,

$$e^{x-y} < 1 \iff x - y < 0 \iff x < y.$$

La réciproque est identique : si $x < y$ alors $x - y < 0$ donc $e^{x-y} < 1$, et en multipliant par $e^y > 0$ on obtient $e^x < e^y$.

Preuve de la propriété 8 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Démonstration :

1) Limite en $+\infty$.

Posons $f(x) = e^x - (1 + x)$. On étudie le sens de variation de cette fonction, et on arrive rapidement au résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - (1 + x) \geq 0$.

On a donc pour tout $x \geq 0$, $e^x \geq 1 + x$.

Alors, lorsque $x \rightarrow +\infty$, on a $1 + x \rightarrow +\infty$, donc par comparaison (hors-programme S6, je sais) :

$$e^x \rightarrow +\infty.$$

Autrement dit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

2) Limite en $-\infty$. Soit $x \rightarrow -\infty$ et posons $t = -x$. Alors $t \rightarrow +\infty$ et $e^x = e^{-t} = \frac{1}{e^t}$. Or, comme $t \rightarrow +\infty$, on a $e^t \rightarrow +\infty$ (voir 1)), donc $\frac{1}{e^t} \rightarrow 0$.

De plus $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi la limite est atteinte par valeurs positives : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$.