

Proportionnalité

I) Rappels sur la proportionnalité

A) La proportionnalité, c'est quoi ?

Définition

Dire que deux grandeurs sont **proportionnelles** signifie que les valeurs d'une des deux grandeurs s'obtiennent en multipliant (ou en divisant) les valeurs de l'autre par un même nombre non nul.

Autrement dit, si on note X et Y deux grandeurs, X et Y sont proportionnelles s'il existe k un nombre réel tel que $X = k \times Y$. Dans ce cas, k est le coefficient de proportionnalité et on a les égalités $Y = k \times X$ et $\frac{Y}{X} = k$

Exemple

Si dans une épicerie, il est affiché que le prix des tomates est à 3,60 € le kilo, alors le prix payé P est proportionnel à la masse M de tomates achetées et on a les formules : $P = 3,6 \times M$ et $\frac{P}{M} = 3,6$.
Le coefficient de proportionnalité est ici 3,6.

B) Tableau de proportionnalité

Définition

Un tableau est un tableau de proportionnalité lorsque l'on obtient chaque terme d'une ligne en multipliant le terme correspondant de l'autre ligne par un même nombre non nul, appelé **coefficient de proportionnalité**.

Propriété

Si un tableau représente deux grandeurs proportionnelles, alors c'est un tableau de proportionnalité.
Dans un tableau de proportionnalité, la deuxième ligne s'obtient en multipliant la première ligne par le même nombre. Ce nombre est le coefficient de proportionnalité.

Exemple 1

Le prix payé pour un achat de carburant est proportionnel au nombre de litres mis dans le réservoir.

Volume en litres	10	20	30	40
Prix en euros	16	32	48	64

Ce tableau est un tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité de la première ligne vers la seconde est 1,6. Il représente ici le prix du carburant au litre.

Exemple 2

La taille d'un enfant n'est pas proportionnelle à son âge.

Âge en années	5	10
Taille en cm	100	130

Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité : le coefficient multiplicateur de la première ligne vers la deuxième est 20 dans une colonne, et 13 dans l'autre.

1) Utiliser la proportionnalité

Méthodes

Il existe plusieurs méthodes pour calculer une grandeur par proportionnalité. Par exemple, 4 kg d'ananas de l'île de la Réunion coûtent 18 euros. Sachant que le prix est proportionnel à la quantité achetée :

- Quel est le prix pour 8 kg ?
- Quel est le prix pour 6 kg ?
- Quel est le prix pour 14 kg ?

Nous allons voir trois méthodes différentes pour répondre à ces questions : la méthode multiplicative, la méthode additive, et le passage à l'unité.

2) Méthode multiplicative

Poids acheté d'ananas	4	8
Prix en euros		

3) Méthode du passage à l'unité

Poids acheté d'ananas	4	1	6
Prix en euros			

4) Méthode additive

Poids acheté d'ananas	6	8	14
Prix en euros			

II) Représentation graphique de la proportionnalité

Propriété

- Dans un repère, une situation de proportionnalité est représentée par une droite passant par l'origine (ou par des points alignés avec l'origine).
- Inversement, une droite (« non verticale ») passant par l'origine d'un repère peut représenter une situation de proportionnalité.

Exemple

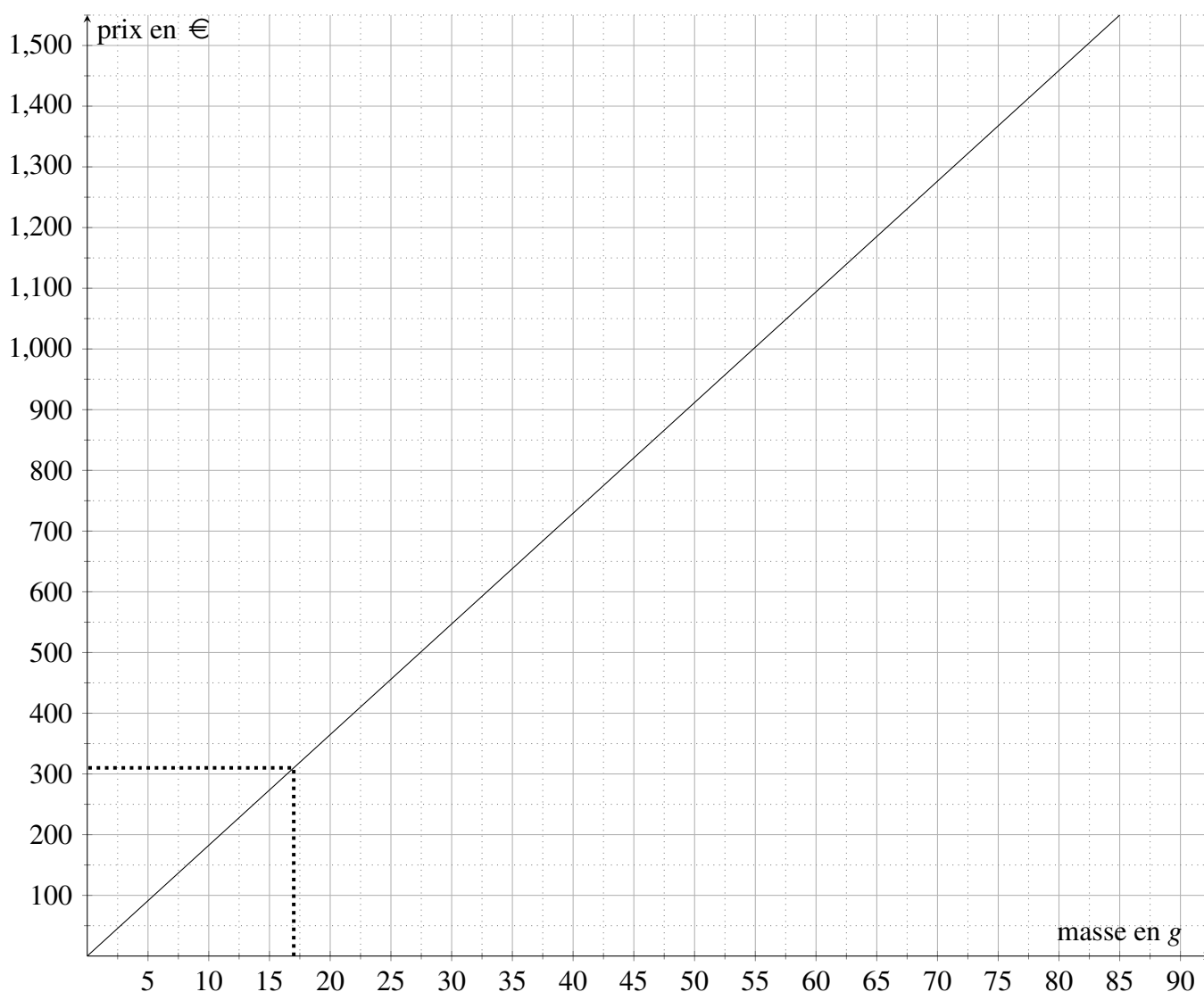
17 g d'or coûtent 310 €.

Il s'agit d'une situation de proportionnalité. Ici, le prix dépend (« est fonction ») de la masse d'or.

Représentons-la dans un repère en plaçant en abscisses la masse d'or (en g) et en ordonnées le prix (en €).

On peut alors utiliser le graphique pour répondre à des questions. La précision des réponses dépendra de la précision du graphique et sera de toute façon approximative.

1. Combien coûtent 70 g d'or ?
2. Avec 1 000 €, quelle quantité d'or puis-je acheter ?



III) Proportionnalité inverse

Définition

En notant X et Y deux grandeurs et k un nombre réel, alors on dit que X et Y sont inversement proportionnelles si X est proportionnelle à l'inverse de Y , c'est-à-dire qu'il existe un nombre k réel tel qu'on a les égalités $Y = \frac{k}{X}$.

Dans ce cas, on a : $X = \frac{k}{Y}$ et $X \times Y = k$.

Exemple

En notant d une distance, v une vitesse et t le temps, on a $v = \frac{d}{t}$. Ainsi pour une distance fixée, la vitesse moyenne v est inversement proportionnelle à la durée t du parcours.

Propriété

Si un tableau représente deux grandeurs inversement proportionnelles, alors le produit des deux lignes est une constante.

Exemple 1

Les grandeurs x et y sont-elles inversement proportionnelles ?

x	1	2	3	4	6	8
y	24	12	8	6	4	3

$$1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 8 \times 3 = 24.$$

Les grandeurs x et y sont inversement proportionnelles.

Exemple 2

Quatre robinets identiques remplissent une cuve en 9 heures, soit 540 minutes. Combien de temps faut-il à 6 robinets pour remplir la même cuve ? On suppose que tous les robinets ont le même débit, et que cela implique que les grandeurs robinets et temps sont inversement proportionnelles).

On peut mettre les informations dans un tableau :

Nombre N de robinets	4	6
Temps t (en minutes)	540	t

Méthode 1 : Les grandeurs robinets et temps sont inversement proportionnelles, donc $4 \times 540 = 6 \times t$. Ainsi :

$$2160 = 6t$$

$$t = \frac{2160}{6} = 360$$

Méthode 2 (En calculant k) : $k = 4 \times 540 = 2160$

$$t = \frac{2160}{N} = \frac{2160}{6} = 360$$

À 6 robinets, il faut 360 minutes, soit 6 heures, pour remplir la cuve.

Remarque

Un exemple de représentation graphique d'une telle situation sera traité en exercice.