Compléments sur les fonctions trigonométriques

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes :

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $[-4\pi; \pi]$

$\sin x = -1$ sur $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur $[-2\pi; 2\pi]$

$\cos x = -2{,}5$ sur $\mathbb{R}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ sur $[0; 4\pi]$

$\sin x = \sin(3x)$ sur $[-\pi; 2\pi]$

$\cos x = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 2 :

1. Convertir en radians : 8° et 33°.
2. Convertir en degrés : $\frac{\pi}{30}$ et $\frac{3\pi}{360}$.
3. En utilisant votre calculatrice, donner une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle x dans les cas suivants :
   (a) $\cos x = 0{,}2$ pour $x \in [0; \pi]$.
   (b) $\sin x = 0{,}58$ pour $x \in [0; \pi]$.
4. (a) On donne $\sin x = -0{,}6$ avec $x \in [\pi; 2\pi]$. Calculer $\cos x$.
   (b) On donne $\cos x = -0{,}1$ avec $x \in [0; \pi]$. Calculer $\sin x$.

Exercice 3 : Placer sur le cercle trigonométrique les angles suivants dont on a donné une mesure en radians :

$\frac{15\pi}{2}$ 2001π $\frac{22\pi}{4}$

$-\frac{9\pi}{2}$ 44π $\frac{241\pi}{3}$

$\frac{208\pi}{3}$ $-\frac{267\pi}{4}$

Exercice 4 :

1. Sans utiliser de calculatrice graphique, tracer dans un repère la représentation graphique des fonctions suivantes sur $[0; 2\pi]$:

   a) $x \mapsto 3\sin x$ b) $x \mapsto -2\sin x$

   c) $x \mapsto \frac{3}{2}\sin x$ d) $x \mapsto -\frac{1}{2}\sin x$

2. Sans utiliser de calculatrice graphique, tracer dans un repère la représentation graphique des fonctions suivantes sur $[0; 3\pi]$:

   a) $x \mapsto \sin(3x)$ b) $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ c) $x \mapsto \sin(-2x)$

Exercice 5 :

1. Déterminer la période des fonctions suivantes.

   a) $x \mapsto \sin(4x)$ b) $x \mapsto \sin(-4x)$

   c) $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$ d) $x \mapsto \sin(0{,}6x)$

2. Dans chaque cas, déterminer la valeur du réel $b > 0$ telle que la fonction $x \mapsto \sin(bx)$ admette pour période p.

   $p = 5\pi$ $p = \dfrac{2\pi}{3}$ $p = 12\pi$ $p = 4$ $p = 100$

Exercice 6 : Sans utiliser de calculatrice graphique, tracer dans un repère la représentation graphique des fonctions suivantes sur $[0; 4\pi]$:

$x \mapsto \sin x - 2$ $x \mapsto \sin(x - 2)$

$x \mapsto \sin(x + 2)$ $x \mapsto \sin x + 2$

$x \mapsto \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $x \mapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) + 1$

Exercice 7 : Décrire la transformation qui permet de passer de la sinusoïde représentant la fonction $x \mapsto \sin x$ à représentation graphique de la fonction :

$x \mapsto \sin x - 1$ $x \mapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ $x \mapsto 2\sin x$

$x \mapsto \sin 4x$ $x \mapsto \dfrac{1}{2}\sin x$ $x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{4}\right)$

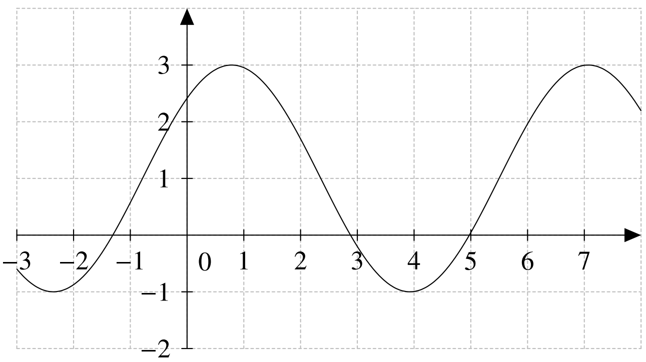
$x \mapsto -\sin x$ $x \mapsto -3 + \sin(x + 2)$ $x \mapsto 2\sin 3x$

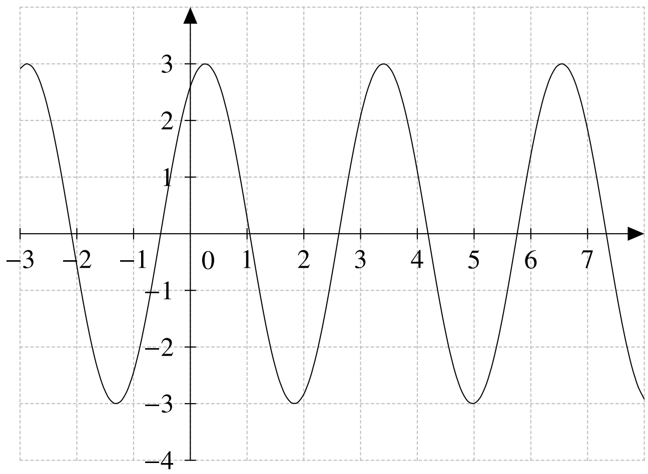
$x \mapsto \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$

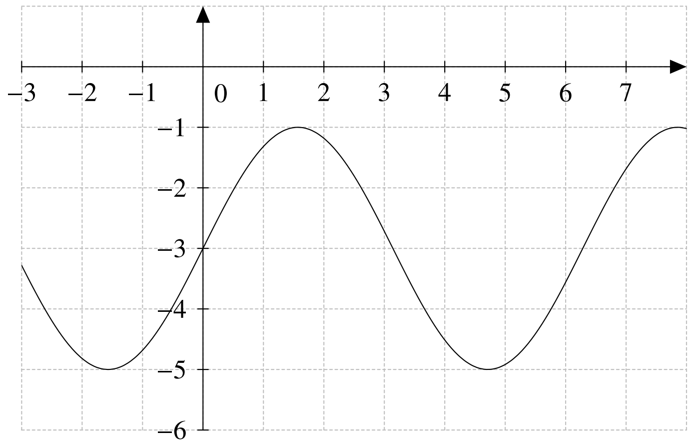
Exercice 8 : Dériver les fonctions suivantes (et donner leurs intervalles de dérivations) :

1. $f(x) = \cos\sqrt{-4x}$.
2. $g(x) = 2x\sin(2x^2 + 1)$.

Exercice 9 :







1. Pour chaque graphique, déterminer son amplitude, son décalage vertical et sa période.
2. Associer à chaque graphique son expression analytique correspondante.

$$f_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \qquad f_2(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \qquad f_3(x) = 2\sin(x) - 3$$

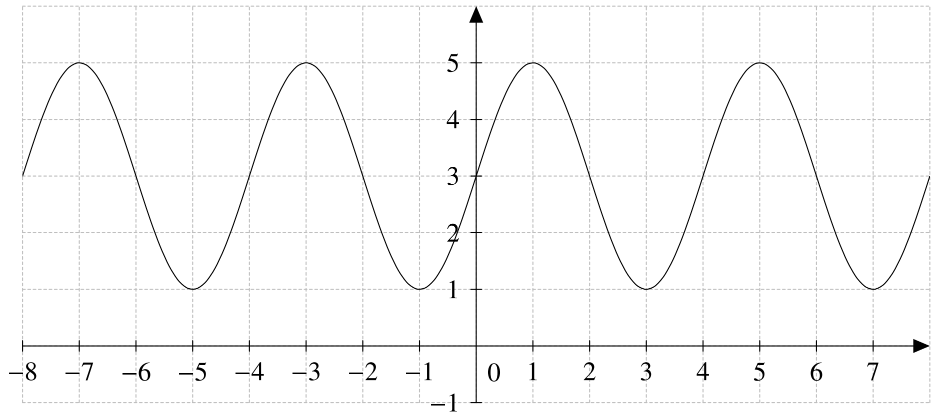
Exercice 10 : La température mensuelle d'une région est modélisée par la fonction :

$$T(x) = 19{,}5\ \sin\left(\frac{\pi}{6}(x-4)\right) + 0{,}5$$

où x est le rang du mois de l'année (en janvier, $x = 1$).

1. Montrer par le calcul que la période de cette fonction est 12.
2. Déterminer la température mensuelle minimale.
3. Déterminer la température mensuelle décembre.

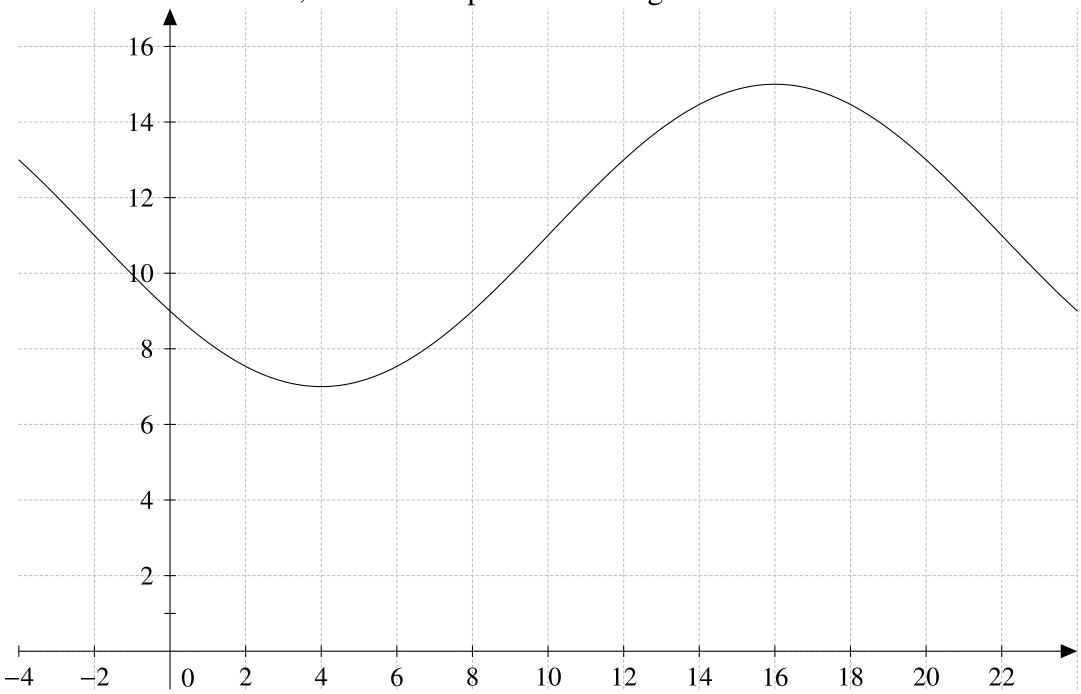
Exercice 11 :



Le graphique ci-dessus est celui de la fonction f définie par $f(x) = a\sin(bx) + d$ où a, b et d sont des nombres entiers.

1. Déterminer les valeurs de a et d.
2. À l'aide du graphique, déterminer la période p de cette fonction puis calculer la valeur de b.

Exercice 12 : Le graphique suivant montre la température en degré Celsius dans une ville pendant une journée. Sur l'axe des abscisses est représentée le temps en heures de minuit 0h00 jusqu'à minuit 24h00 du jour suivant. Sur l'axe des ordonnées, on lit la température en degré Celsius.

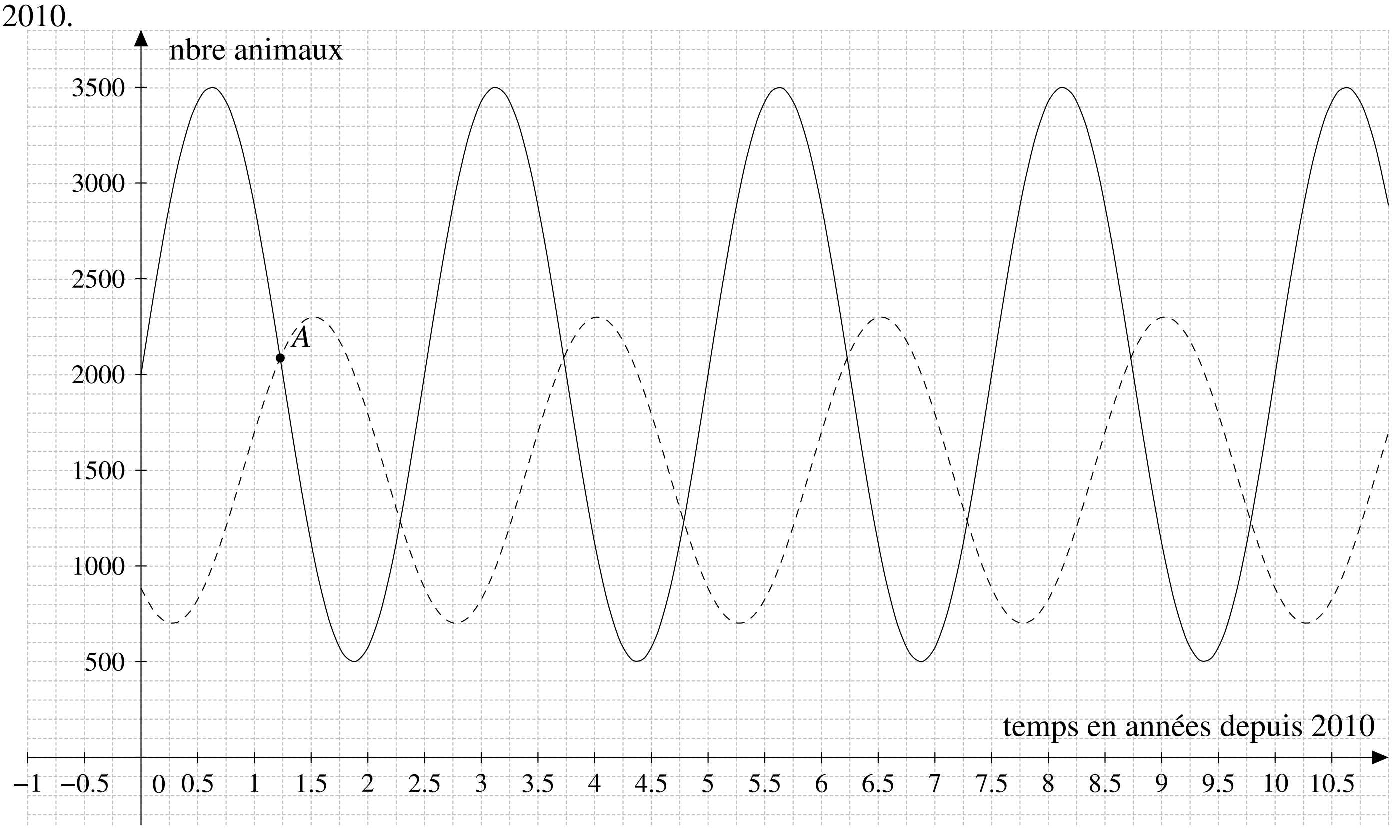


1. À l'aide du graphique, déterminer l'heure à laquelle :
   (a) la température est minimale,
   (b) la température est maximale,
   (c) la température augmente le plus rapidement.
2. La température peut être modélisée par la fonction suivante :

$$f(x) = A\sin(B(x - C)) + D$$

   (a) Justifier que la valeur de A est 4.
   (b) Trouver la valeur des réels B et D.

Exercice 13 : Dans une région d'Europe, les hiboux chassent les campagnols. Le nombre d'hiboux et de campagnols a été étudié depuis 2010. Nous commençons à étudier l'évolution du nombre d'hiboux et de campagnols en 2010.



— Le nombre de campagnols est donné par la fonction ci-dessous :

$$f(t) = 1500\sin(bt) + 2000$$

où t est le nombre d'années écoulées depuis 2010 et b est un nombre réel.

— Le nombre d'hiboux est donné par la fonction suivante :

$$g(t) = 800\sin\left(\frac{4\pi}{5}(t - 0{,}9)\right) + 1500$$

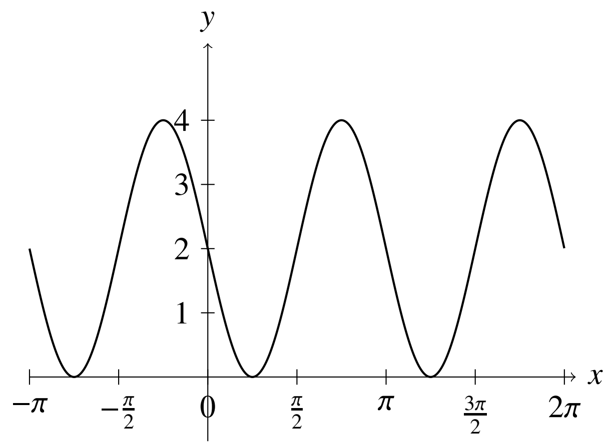
où t est le nombre d'années écoulées depuis 2010.

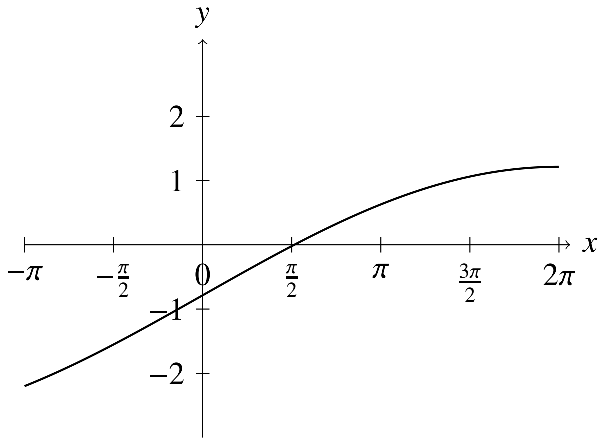
Voici les graphes de ces fonctions :
Le nombre d'hiboux est représenté par la courbe en pointillés et l'autre courbe correspond au nombre de campagnols.

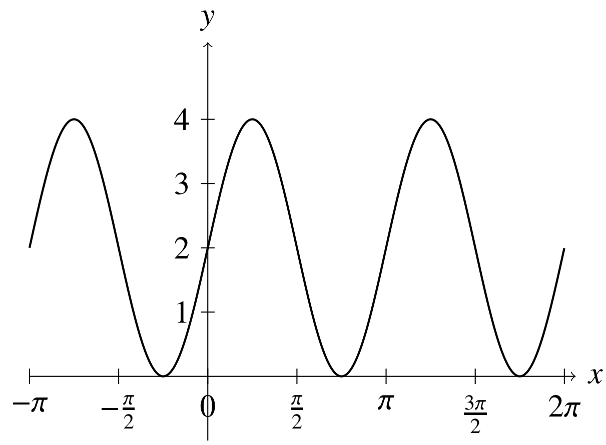
1. Déterminer la période de la fonction f puis en déduire la valeur du paramètre b.
2. Déterminer les coordonnées du point A (au dixième d'année près) et interpréter ce point dans son contexte.
3. Déterminer en quelle année (après 2020) le nombre d'hiboux atteindra de nouveau un maximum et justifier la réponse.
4. Décrire la situation quand le nombre de proies diminue.

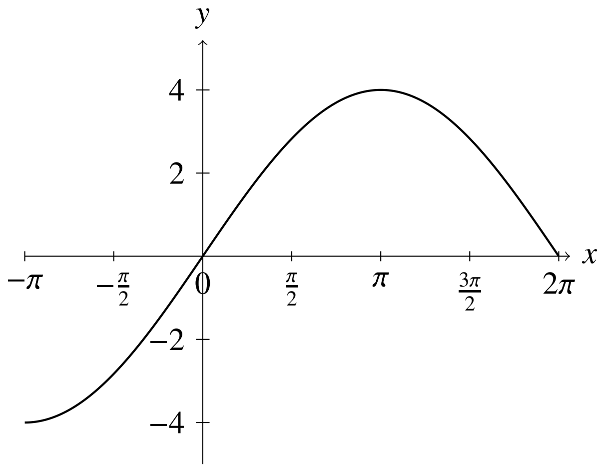
Exercice 14 : Associer chacune des fonctions suivantes avec son graphe.

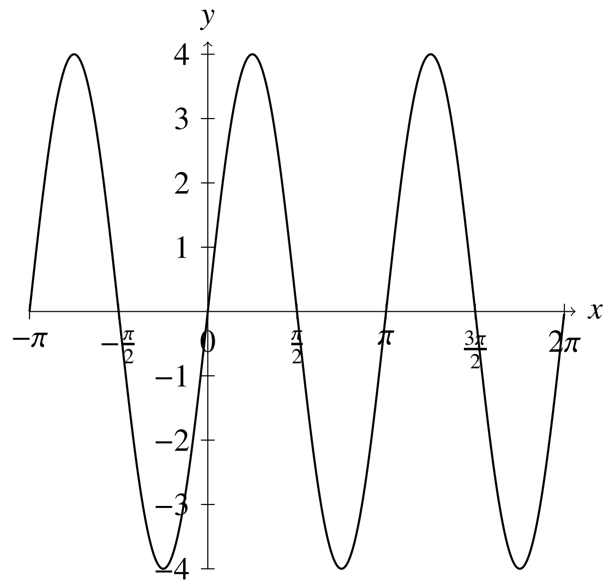
$$f(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad g(x) = 2\sin(2x) + 2 \qquad h(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

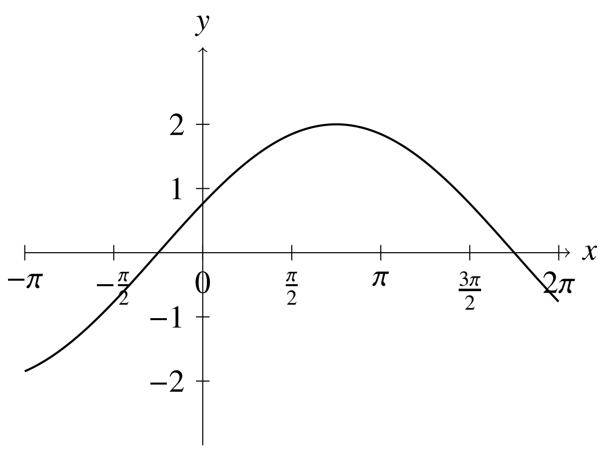




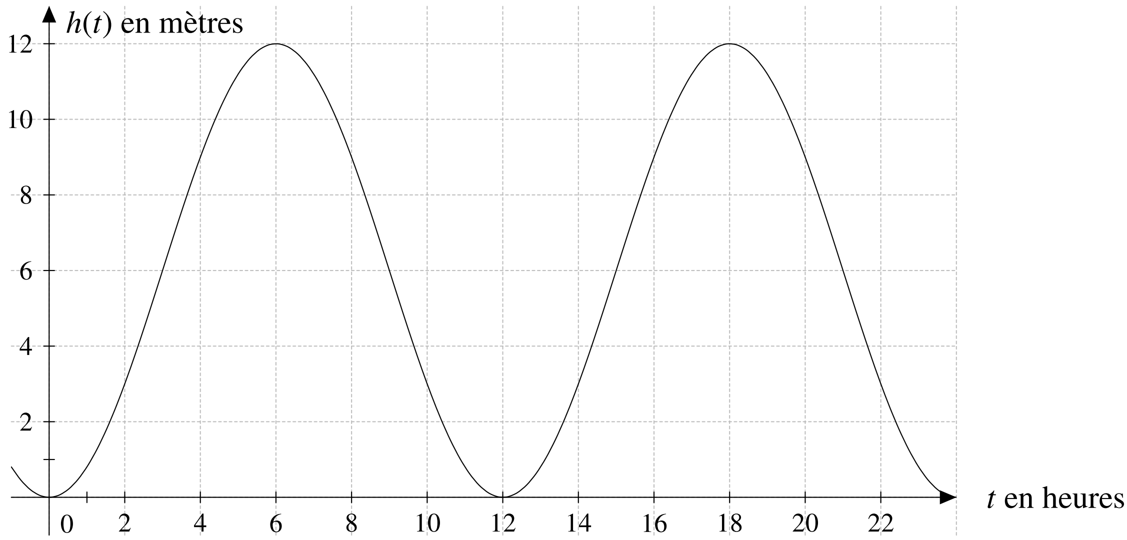








Exercice 15 : Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.



Partie 1 : Le niveau de la mer le plus bas est appelé marée basse ; dans ce cas, on dit que le niveau de la mer est 0. Le niveau de la mer au cours du temps peut alors être modélisé par la fonction h suivante :

$$h(t) = a\sin(b(t-c)) + d$$

où t est le temps en heures et $h(t)$ le niveau de la mer en mètres au temps t.

1. Lire sur le graphique les valeurs des paramètres a et d.
2. En utilisant le graphique, déterminer la valeur du paramètre b.

Partie 2 : La profondeur de l'eau dans un bassin portuaire peut être décrite par la fonction H suivante où t désigne le temps en heures à partir de minuit ($t = 0$), et $H(t)$ est la profondeur de l'eau, en mètres, au cours du temps t.

$$H(t) = 6 + 1,8\cos(0,507t)$$

1. Dans le contexte de cet exercice, interpréter le sens du nombre 6 dans l'expression de $H(t)$.
2. Calculer la profondeur de l'eau à 8h15 du matin.
3. Indiquer, dans le contexte de cet exercice, comment interpréter les valeurs de t solutions de l'équation $H'(t) = 0$.

Exercice 16 : La profondeur de l'eau dans un petit port de la mer du Nord varie en fonction du temps à cause de la marée.
En cette partie du globe, il y a deux marées par jour.
La profondeur a été mesurée à intervalles de 3 heures le 15 juin à 0h00 et les données suivantes ont été enregistrées.

Heure	0h00	3h00	6h00	9h00	12h00
Profondeur en m	3,6	5,2	3,6	2	3,6

Dans ce problème, on suppose que la profondeur de l'eau peut être modélisée par la fonction h définie par

$$h(t) = 1,6\ \sin(0,5236\,t) + 3,6$$

1. Donner la nature du modèle représenté par la fonction h.
2. Expliquer comment chacune des trois constantes 1,6 ; 0,5236 et 3,6 peuvent être trouvées à partir des données du tableau.
3. Un grand ferry venant d'une île voisine a besoin d'une profondeur minimale de 4 m pour pouvoir accoster au port. Montrer que la première heure à laquelle le ferry peut accoster le 15 juin est 00h29 (arrondie à la minute près).
4. Déterminer l'heure la plus tardive avant midi à laquelle le ferry peut accoster au port.