# Rapports dans un triangle rectangle

## I) Triangles semblables

### A) Définitions

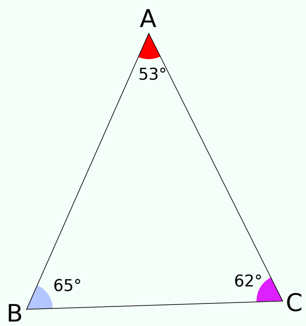
**Définition** Deux **triangles semblables** sont deux triangles qui ont leurs angles deux à deux de même mesure.

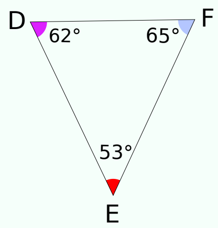
**Exemple** Sur la figure ci-dessous, les deux triangles sont semblables. En effet, on a :

$\widehat{ABC} = \widehat{EFD} = 65°$

$\widehat{BAC} = \widehat{DEF} = 53°$

$\widehat{ACB} = \widehat{EDF} = 62°$




**Vocabulaire** Lorsque deux triangles sont semblables :
-Les angles égaux sont dits homologues.
-Les côtés opposés à des angles égaux sont dits homologues.
-Les sommets des angles égaux sont dits homologues.
-Lorsque deux triangles ont leurs côtés homologues de même longueur, ils sont alors égaux. On dit aussi qu'ils sont superposables, ou isométriques.

| Angles homologues | Sommets homologues | Côtés homologues |
|---|---|---|
| $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DEF}$ | $A$ et $E$ | $[AB]$ et $[EF]$ |
| $\widehat{ABC}$ et $\widehat{EFD}$ | $B$ et $F$ | $[BC]$ et $[DF]$ |
| $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EDF}$ | $C$ et $D$ | $[CA]$ et $[DE]$ |

**Remarque** Pour montrer que deux triangles sont semblables, il suffit de s'assurer que deux couples d'angles sont égaux deux à deux. Il est inutile de vérifier le troisième couple d'angles, car on sait que la somme des angles d'un triangle vaut toujours 180°.

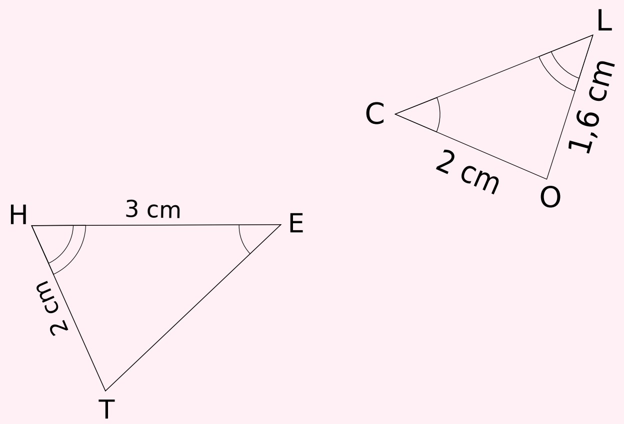
## B) Propriété et exemple

**Propriété**

Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés de l'un sont proportionnelles aux longueurs des côtés de l'autre.

**Exemple**

Les triangles $COL$ et $THE$ de la figure ci-dessous sont semblables. Calculer les longueurs $CL$ et $TE$.




Les triangles $COL$ et $THE$ sont semblables, donc les longueurs des côtés homologues sont proportionnelles.

Les côtés $OL$ et $HT$ sont homologues, les côtés $CL$ et $HE$ sont homologues et les côtés $OC$ et $TE$ sont homologues. On a donc :

$\dfrac{OL}{HT} = \dfrac{CL}{HE} = \dfrac{OC}{TE}$, soit $\dfrac{1,6}{2} = \dfrac{CL}{3} = \dfrac{2}{TE}$.

On a alors $0,8 = \dfrac{CL}{3}$ et $0,8 = \dfrac{2}{TE}$.

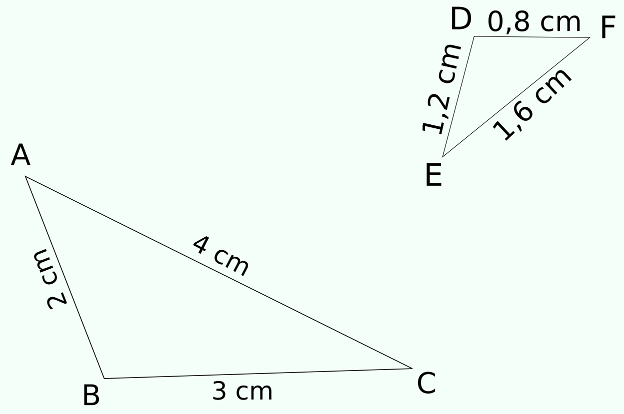
On trouve $CL = 0,8 \times 3 = 2,4$ cm et $TE = 2 \div 0,8 = 2,5$ cm.

**Propriété**

**La propriété réciproque** est vraie, c'est-à-dire :
Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles deux à deux, alors ces triangles sont semblables.

Exemple

Les deux triangles suivants sont-ils semblables ?




| | | | |
|---|---|---|---|
| Côtés de $ABC$ | $AB = 2$ cm | $BC = 3$ cm | $AC = 4$ cm |
| Côtés de $DEF$ | $DF = 0,8$ cm | $ED = 1,2$ cm | $EF = 1,6$ cm |

On remarque que :

$$\frac{DF}{AB} = \frac{0,8}{2} = 0,4$$

$$\frac{ED}{BC} = \frac{1,2}{3} = 0,4$$

$$\frac{EF}{AC} = \frac{1,6}{4} = 0,4$$

Les côtés de ces deux triangles sont proportionnels. Les triangles sont donc semblables.

Remarque **Remarque** : Le coefficient de proportionnalité est appelé le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

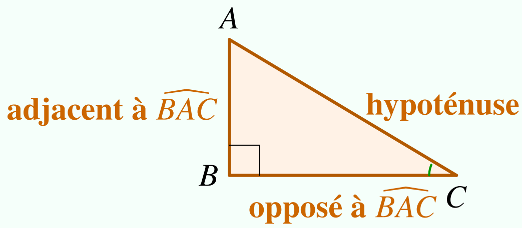
# II) Rapports dans un triangle rectangle

## A) Côté adjacent, côté opposé, hypoténuse

Définition Dans un triangle rectangle, les deux côtés d'un angle aigu sont le **côté adjacent** et l'**hypoténuse**.
Le troisième côté est le **côté opposé**.

Exemple

Dans le triangle ci-dessous (où $AC$ est l'hypoténuse, $BC$ le côté opposé à l'angle $\widehat{BAC}$ et $AB$ le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$) :




## B) Pente

Propriété

Un triangle rectangle « posé à plat » peut représenter l'inclinaison d'un terrain, l'ombre d'un objet, etc.

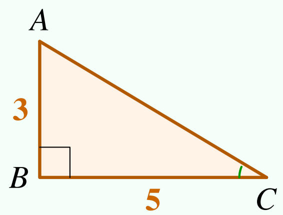
La **pente** est alors le **quotient** des longueurs des deux côtés de l'angle droit : le côté vertical par le côté horizontal.

Exemple

L'angle $\widehat{ACB}$ représente l'inclinaison d'une route.

La pente de cette route est de

$$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%.$$




Remarque

1. La pente est souvent exprimée en pourcentage.
2. L'angle $\widehat{ACB}$ se nomme **l'angle d'incidence**.

## C) Triangles rectangles semblables et pentes

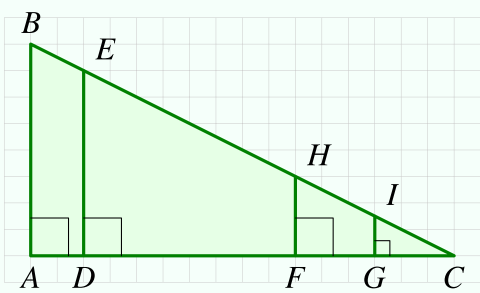
Propriété

Si deux triangles rectangles ont leurs angles égaux deux à deux, alors leurs pentes sont égales.

Exemple

Les 4 triangles rectangles ci-contre ont leurs angles égaux deux à deux. Ils sont donc **semblables**. Leurs pentes sont égales.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DC} = \frac{FH}{FC} = \frac{GI}{GC}.$$



Conclusion

1. Les longueurs des triangles rectangles semblables sont proportionnelles. La pente est le coefficient de proportionnalité des longueurs des côtés de l'angle droit.
2. La pente ne dépend donc que de la mesure des angles aigus et non des longueurs du triangle rectangle.
   On obtient les tableaux suivants qui donnent la pente (en %) en fonction de la mesure de l'angle de l'inclinaison $\widehat{ACB}$ (et réciproquement).

**Tableau de conversion de degrés en pourcentage**

| degré | % | degré | % | degré | % |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,75 | 26 | 48,77 | 51 | 123,49 |
| 2 | 3,49 | 27 | 50,95 | 52 | 127,99 |
| 3 | 5,24 | 28 | 53,17 | 53 | 132,70 |
| 4 | 6,99 | 29 | 55,43 | 54 | 137,64 |
| 5 | 8,75 | 30 | 57,74 | 55 | 142,81 |
| 6 | 10,51 | 31 | 60,09 | 56 | 148,26 |
| 7 | 12,28 | 32 | 62,49 | 57 | 153,99 |
| 8 | 14,05 | 33 | 64,94 | 58 | 160,03 |
| 9 | 15,84 | 34 | 67,45 | 59 | 166,43 |
| 10 | 17,63 | 35 | 70,02 | 60 | 173,21 |
| 11 | 19,44 | 36 | 72,65 | 61 | 180,40 |
| 12 | 21,26 | 37 | 75,36 | 62 | 188,07 |
| 13 | 23,09 | 38 | 78,13 | 63 | 196,26 |
| 14 | 24,93 | 39 | 80,98 | 64 | 205,03 |
| 15 | 26,79 | 40 | 83,91 | 65 | 214,45 |
| 16 | 28,67 | 41 | 86,93 | 66 | 224,60 |
| 17 | 30,57 | 42 | 90,04 | 67 | 235,59 |
| 18 | 32,49 | 43 | 93,25 | 68 | 247,51 |
| 19 | 34,43 | 44 | 96,57 | 69 | 260,51 |
| 20 | 36,40 | 45 | 100,00 | 70 | 274,75 |
| 21 | 38,39 | 46 | 103,55 | 71 | 290,42 |
| 22 | 40,40 | 47 | 107,24 | 72 | 307,77 |
| 23 | 42,45 | 48 | 111,06 | 73 | 327,09 |
| 24 | 44,52 | 49 | 115,04 | 74 | 348,74 |
| 25 | 46,63 | 50 | 119,18 | 75 | 373,21 |

**Tableau de conversion des pourcentages en degrés**

| % | degré | % | degré | % | degré |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 2,86 | 55 | 28,81 | 105 | 46,40 |
| 10 | 5,71 | 60 | 30,96 | 110 | 47,73 |
| 15 | 8,53 | 65 | 33,02 | 115 | 48,99 |
| 20 | 11,31 | 70 | 34,99 | 120 | 50,19 |
| 25 | 14,04 | 75 | 36,87 | 125 | 51,34 |
| 30 | 16,70 | 80 | 38,66 | 130 | 52,43 |
| 35 | 19,29 | 85 | 40,36 | 135 | 53,47 |
| 40 | 21,80 | 90 | 41,99 | 140 | 54,46 |
| 45 | 24,23 | 95 | 43,53 | 145 | 55,41 |
| 50 | 26,57 | 100 | 45,00 | 150 | 56,31 |