

Fractions

1 Définitions

Définition

Soient deux nombres a et b avec $b \neq 0$.

On note $\frac{a}{b}$ le quotient de a par b . On dit que $\frac{a}{b}$ est une **écriture fractionnaire** de ce quotient.

a est le **numérateur** et b est le **dénominateur** de l'écriture fractionnaire.

Exemple

Voici des nombres en écriture fractionnaire.

$$\frac{15,7}{100} \quad \frac{3}{45} \quad \frac{97}{10} \quad \frac{49,78}{2,1} \quad \frac{3}{1\,000} \quad \frac{789}{11} \quad \frac{1\,000}{94} \quad \frac{14}{5,2}$$

Définition

Si le numérateur et le dénominateur d'une écriture fractionnaire sont des entiers, il s'agit d'une **fraction**.

Si, en plus, le dénominateur est une puissance de 10 (10; 100; 1 000; ...), il s'agit d'une **fraction décimale**.

Exemple

Si l'on considère les écritures fractionnaires de l'exemple précédent, celles qui sont des fractions sont :

$$\frac{3}{45} \quad \frac{97}{10} \quad \frac{3}{1\,000} \quad \frac{789}{11} \quad \frac{1\,000}{94}$$

Parmi elles, les fractions décimales sont $\frac{97}{10}$ et $\frac{3}{1\,000}$.

Remarque

— Une fraction admet une **écriture décimale**. Par exemple :

$$\frac{3}{4} = 0,75 \quad \frac{13}{5} = 2,6 \quad \frac{1}{8} = 0,125 \quad \frac{10}{3} = 3,333\dots \quad \frac{4}{7} \approx 0,5714\dots$$

— Les nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{13}{5}$ et $\frac{1}{8}$ sont des nombres décimaux.

En revanche, $\frac{10}{3}$ et $\frac{4}{7}$ n'en sont pas car leur écriture décimale est infinie.

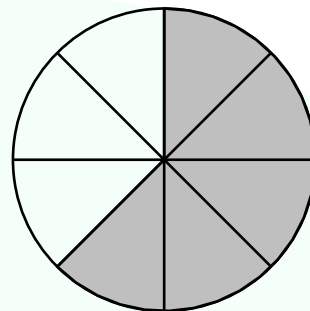
2 Proportions

Les fractions servent notamment à exprimer des proportions.

Exemple

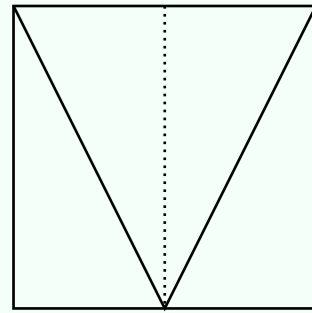
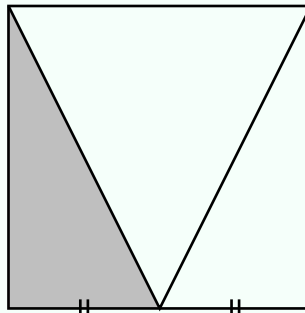
- $\frac{5}{8}$ de la surface du disque ci-contre est grisée.

En effet, cinq secteurs sur les huit secteurs de même aire sont grisés.



- $\frac{1}{4}$ de la surface du carré ci-contre, à gauche, est grisée.

On remarque qu'un secteur parmi les trois secteurs délimités est grisé, mais ces trois secteurs ne sont pas de même aire. Pour bien réfléchir, il faut « voir » le carré redécoupé comme sur l'exemple de droite.

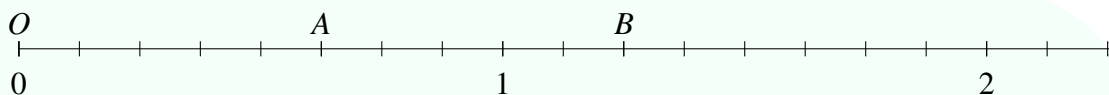


- Dans une classe de 23 élèves, il y a 10 garçons.

La proportion de garçons dans cette classe est de $\frac{10}{23}$. La proportion de filles est de $\frac{13}{23}$.

3 Droite graduée

Exemple



1. Donner les abscisses des points A et B.
2. Placer les points suivants sur la droite graduée :

$$C\left(\frac{3}{8}\right) \quad D\left(1 + \frac{7}{8}\right) \quad E\left(\frac{1}{4}\right) \quad F\left(\frac{3}{2}\right) \quad G\left(\frac{7}{7}\right) \quad H\left(\frac{17}{8}\right)$$

3. Déterminer l'unité de cette demi-droite graduée.

Exercice

Placer les points suivants sur une droite graduée : $A\left(\frac{5}{6}\right)$ $B\left(-\frac{1}{6}\right)$ $C\left(\frac{2}{3}\right)$ $D\left(\frac{7}{6}\right)$ $E\left(\frac{5}{3}\right)$

Exercice

Écrire les fractions suivantes comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$$\frac{17}{4}$$

$$\frac{29}{8}$$

$$\frac{1738}{9}$$

$$\frac{1439}{2027}$$

$$\frac{20}{8}$$

4 Fractions égales

On a déjà pu voir sur quelques exemples que deux fractions écrites avec des nombres différents peuvent être égales.

Propriété

On ne change pas la valeur d'une fraction si on **multiplie** ou si on **divise** son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

Exemple

$$A = \frac{3}{5} \\ = \frac{3 \times 6}{5 \times 6} \\ = \frac{18}{30}$$

$$B = \frac{4}{7} \\ = \frac{4 \times 6}{7 \times 6} \\ = \frac{24}{42}$$

$$C = \frac{22}{4} \\ = \frac{22 \div 2}{4 \div 2} \\ = \frac{11}{2}$$

$$D = \frac{81}{9} \\ = \frac{81 \div 9}{9 \div 9} \\ = \frac{9}{1} = 9$$

Définition

Simplifier une fraction, c'est donner une fraction qui lui est égale, écrite avec des numérateurs et dénominateurs plus petits. Si on ne peut pas simplifier une fraction, on dit qu'elle est **irréductible**.

Exercice

Simplifier au maximum les fractions suivantes.

$$\frac{10}{15}$$

$$\frac{18}{24}$$

$$\frac{45}{72}$$

$$\frac{20}{12}$$

$$\frac{25}{35}$$

$$\frac{14}{49}$$

$$\frac{1\,500}{2\,500}$$

Remarque

Lorsque l'on a pour résultat une fraction, il est toujours mieux de donner une fraction irréductible.

5 Comparaisons de fractions

5.1 Comparaison à 1

Propriété

Soit une fraction $\frac{a}{b}$ (pour laquelle les nombres a et b sont **positifs**). Alors on a :

$$\bullet \frac{a}{b} < 1 \quad \text{si } a < b$$

$$\bullet \frac{a}{b} = 1 \quad \text{si } a = b$$

$$\bullet \frac{a}{b} > 1 \quad \text{si } a > b$$

Remarque

On peut écrire cette propriété autrement : soit une fraction pour laquelle les numérateurs et les dénominateurs sont **positifs**, alors on a :

- Si le numérateur est supérieur au dénominateur, alors la fraction est supérieure à 1.

- Si le numérateur est inférieur au dénominateur, alors la fraction est inférieure à 1.

Exemple

Compléter par $<$, $>$ ou $=$.

$$\frac{3}{7} \dots 1$$

$$\frac{27}{12} \dots 1$$

$$1 \dots \frac{23}{4\,217}$$

$$1 \dots \frac{35}{34}$$

$$\frac{127}{127} \dots 1$$

$$\frac{1\,024}{1\,058} \dots 1$$

$$\frac{43}{43} \dots \frac{12}{12}$$

$$\frac{2\,048}{5\,312} \dots \frac{4}{3}$$

5.2 Cas général

Propriété

- Pour comparer deux fractions positives qui ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le numérateur le plus grand.
- Pour comparer deux fractions positives qui ont le même numérateur, la plus grande est celle qui a le dénominateur le plus petit.

Exercice

Compléter par $<$, $>$ ou $=$.

$$\frac{3}{7} \cdots \frac{5}{7}$$

$$\frac{27}{12} \cdots \frac{29}{12}$$

$$\frac{7}{5} \cdots \frac{8}{5}$$

$$\frac{39}{31} \cdots \frac{41}{31}$$

$$\frac{5}{8} \cdots \frac{13}{24}$$

$$\frac{7}{4} \cdots \frac{11}{6}$$

$$\frac{11}{13} \cdots \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} \cdots \frac{7}{9}$$

$$\frac{6}{8} \cdots \frac{6}{11}$$

$$\frac{2}{4} \cdots \frac{2}{3}$$

$$\frac{11}{13} \cdots \frac{11}{14}$$

$$\frac{3}{4} \cdots \frac{3}{5}$$

Remarque

- Si les deux fractions sont négatives, la plus grande est celle qui est la plus proche de 0.
- Si les deux fractions sont de signes contraires, la plus grande est celle qui est positive évidemment.

Exemples

$$-\frac{1}{3} > -\frac{2}{3} \text{ car } \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{8} > -\frac{20}{21} \text{ car } \frac{7}{8} > 0 \text{ et } -\frac{20}{21} < 0$$

6 Fraction d'une quantité

Pour calculer une fraction d'une quantité, on effectue une multiplication.

Exemple

Jean dépense $\frac{3}{5}$ de ses 70 euros. Combien a-t-il dépensé ?

$$\frac{3}{5} \times 70 = 0,6 \times 70 = 42$$

Il a dépensé 42 euros.

Remarque

Il y a plusieurs méthodes pour calculer $\frac{3}{5} \times 70$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{5} \times 70 \\ &= 0,6 \times 70 \\ &= 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{5} \times 70 \\ &= \frac{3 \times 70}{5} \\ &= \frac{210}{5} \\ &= 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{5} \times 70 \\ &= 3 \times \frac{70}{5} \\ &= 3 \times 14 \\ &= 42 \end{aligned}$$

Exercice

Effectuer les calculs suivants :

a) $\frac{5}{8}$ de 1 780 m

b) $\frac{4}{7}$ de 28,7 kg

c) $\frac{8}{9}$ de 785,70 euros

Exercice

Une fleuriste a vendu les trois quarts de ses 316 roses. Combien en a-t-elle vendues ?