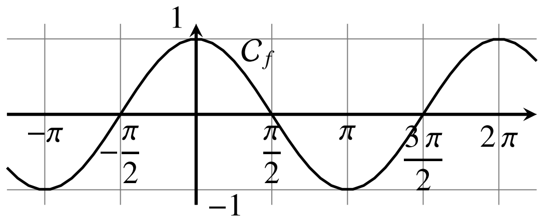
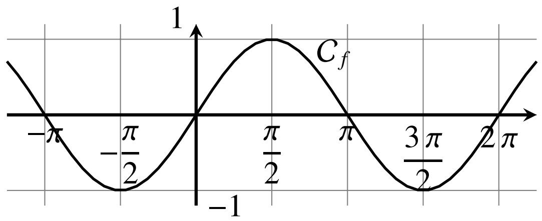
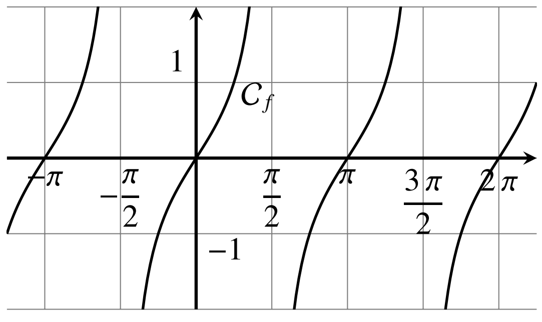
Compléments sur les fonctions trigonométriques

1 Rappels

Les **fonctions trigonométriques** usuelles sont les fonctions cos, sin et tan. Elles sont 2π-périodiques, la fonction tan est même π-périodique. Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$, la fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

<table>
<tr><th>Fonction</th><th>Représentation graphique</th><th>Variations</th></tr>
<tr><td>$f : x \longmapsto \cos(x)$</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>π</td><td></td><td>2π</td></tr><tr><td>f</td><td>1</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td><td>1</td></tr></table>
f est 2π-périodique.</td></tr>
<tr><td>$f : x \longmapsto \sin(x)$</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>$\frac{\pi}{2}$</td><td></td><td>$\frac{3\pi}{2}$</td><td></td><td>2π</td></tr><tr><td>f</td><td>0</td><td>↗</td><td>1</td><td>↘</td><td>-1</td><td>↗</td><td>0</td></tr></table>
f est 2π-périodique.</td></tr>
<tr><td>$f : x \longmapsto \tan(x)$</td><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\frac{\pi}{2}$</td><td></td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr><tr><td>f</td><td>‖ $-\infty$</td><td>↗</td><td>$+\infty$ ‖</td></tr></table>
f est π-périodique.</td></tr>
</table>

Propriétés

- $\forall x\in\mathbb{R},\quad -1\leqslant\cos(x)\leqslant 1$ et $-1\leqslant\sin(x)\leqslant 1$
- $\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos^2(x)+sin^2(x)=1\qquad \cos(-x)=\cos(x)\qquad \sin(-x)=-\sin(x)$
- $\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(x+\pi)=-\cos(x)$ et $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)$
- $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(x+\pi)=-\sin(x)$ et $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)$
- $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,k\in\mathbb{Z}\right\},\qquad \tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

fonction f	dérivée f'	Intervalle de validité
$f(x) = \cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Remarque Attention, la plupart de ces formules et propriétés ne sont valables que pour des angles en radians.

2 Fonctions composées et tableau récapitulatif

Théorème **Dérivée de fonctions composées**
Soient f et g définies et dérivables sur D_f et D_g et $\forall x \in D_g, g(x) \in D_f$. Alors :

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \times g'(x)$$

Exemple Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (4\,x - 5)^3$.

On a $h(x) = (f \circ g)(x)$ avec :

$f(x) = x^3$ $\qquad g(x) = 4\,x - 5$

$f'(x) = 3\,x^2$ $\qquad g'(x) = 4$

f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = 3(4\,x - 5)^2 \times 4 = 192\,x^2 - 480\,x + 300$$

Tableau récapitulatif

f	f'
$f \circ g$	$(f' \circ g) \times g'$
$\cos u$	$-u' \times \sin u$
$\sin u$	$u' \times \cos u$

3 Retour sur la périodicité et les paramètres

Définition

Supposons que f soit une fonction et D_f son ensemble de définition (en général un intervalle ou une réunion d'intervalles). f est dite **p-périodique** (où p est un nombre réel strictement positif) si :

- Pour tout $x \in D_f$, on a $x + p \in D_f$.
- Pour tout $x \in D_f$, on a $f(x + p) = f(x)$.

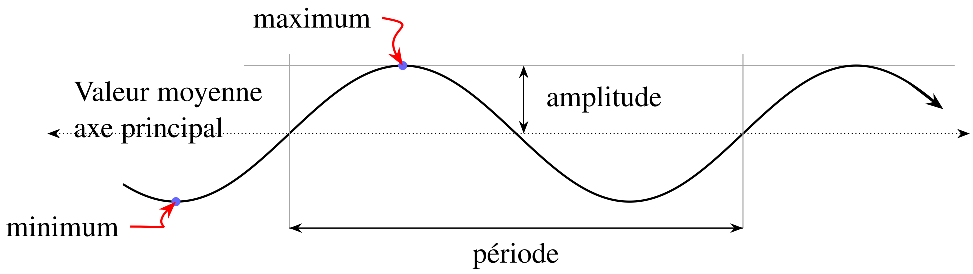
Vocabulaire : p s'appelle **la période**.

Définition

Quand la courbe est une sinusoïde, on appelle :

- **Amplitude** :
$$\text{amplitude} = \frac{\max - \min}{2}.$$
- **Moyenne** :
$$\text{moyenne} = \frac{\max + \min}{2}.$$

Graphiquement :



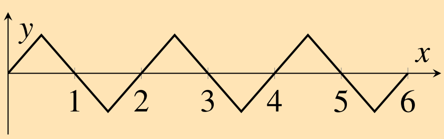
Propriété

La courbe **représentative** d'une fonction périodique est invariante (ne change pas) par toute translation horizontale de vecteur $\vec{u}(np; 0)$, où $n \in \mathbb{Z}$.

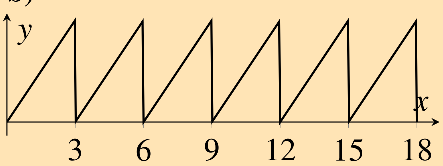
Exercice

Entourer les graphiques représentant des fonctions périodiques.

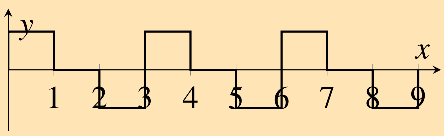
a)



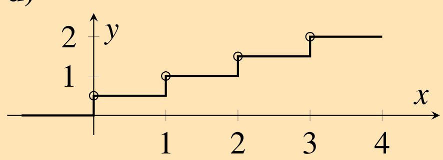
b)



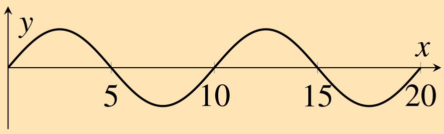
c)



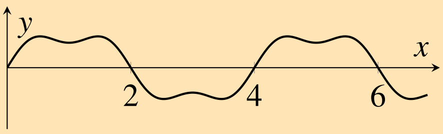
d)



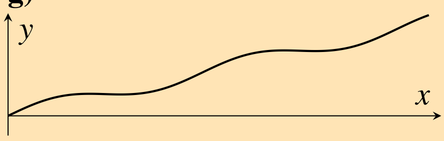
e)



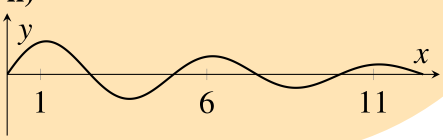
f)



g)



h)



4 Transformation de la fonction sinus, et influence des paramètres

Le but de cette partie est d'étudier l'impact des paramètres a, b, c et d sur l'allure et les propriétés de la courbe de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a\sin(b(x-c)) + d.$$

1) La fonction $x \mapsto a\sin(x)$

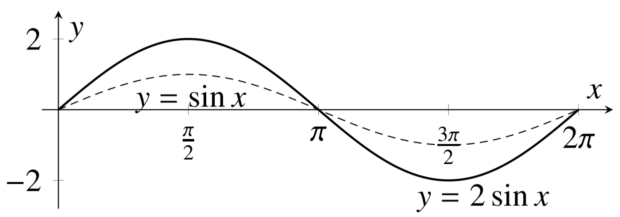
Activité : À l'aide de la calculatrice graphique, compléter le tableau suivant.

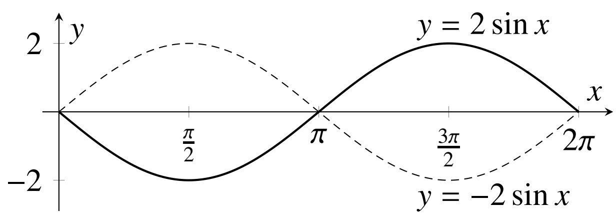
Fonction	Maximum	Minimum	Amplitude	Période
$x \mapsto \sin(x)$				
$x \mapsto 2\sin(x)$				
$x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x)$				
$x \mapsto -\sin(x)$				
$x \mapsto a\sin(x)$				

Propriété

La multiplication de sin par a affecte l'amplitude de la sinusoïde et le signe de a affecte son sens de variation :

- L'amplitude de la fonction $x \mapsto a\sin(x)$ est multipliée par $|a|$.
- Si $a > 0$, $x \mapsto a\sin(x)$ a les mêmes variations que sin. Si $a < 0$, elle a les variations contraires.





2) La fonction $x \mapsto \sin(bx)$

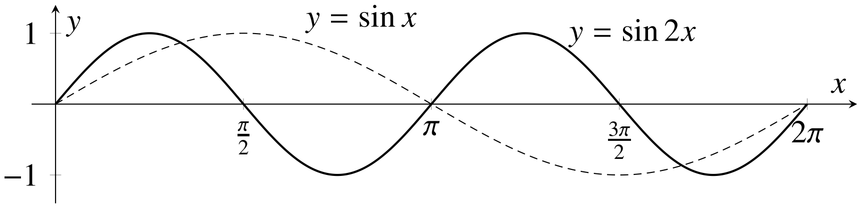
Propriété

La multiplication de la variable par b pour obtenir la fonction $x \mapsto \sin(bx)$ affecte uniquement la **période** de la sinusoïde. La période est :

$$p = \frac{2\pi}{b}.$$

Activité : À l'aide de la calculatrice graphique, compléter le tableau suivant.

Fonction	Maximum	Minimum	Amplitude	Période
$x \mapsto \sin(x)$				
$x \mapsto \sin(3x)$				
$x \mapsto \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$				
$x \mapsto \sin(bx)$				



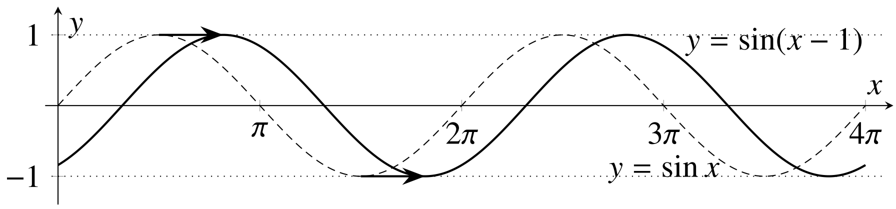
3) La fonction $x \mapsto \sin(x-c)$

Activité : À l'aide de la calculatrice graphique, compléter le tableau suivant.

Fonction	Maximum	Minimum	Amplitude	Période
$x \mapsto \sin(x)$				
$x \mapsto \sin(x-2)$				
$x \mapsto \sin(x+3)$				
$x \mapsto \sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$				
$x \mapsto \sin(x-c)$				

Propriété

La transformation qui permet d'obtenir la fonction $x \mapsto \sin(x-c)$ (retirer c à la variable dans le sinus) effectue un **déphasage** de la sinusoïde.
C'est un décalage horizontal, c'est-à-dire une translation de la courbe de la fonction sinus de vecteur $\vec{u}(c;0)$.
Elle n'affecte ni le maximum, ni l'amplitude, ni la période.



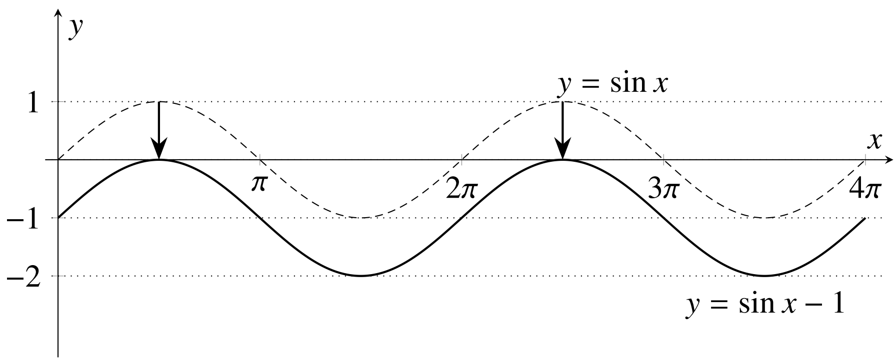
4) La fonction $x \mapsto \sin(x)+d$

Activité : À l'aide de la calculatrice graphique, compléter le tableau suivant.

Fonction	Maximum	Minimum	Amplitude	Période
$x \mapsto \sin(x)$				
$x \mapsto \sin(x)+3$				
$x \mapsto \sin(x)-2$				
$x \mapsto \sin(x)+d$				

Propriété

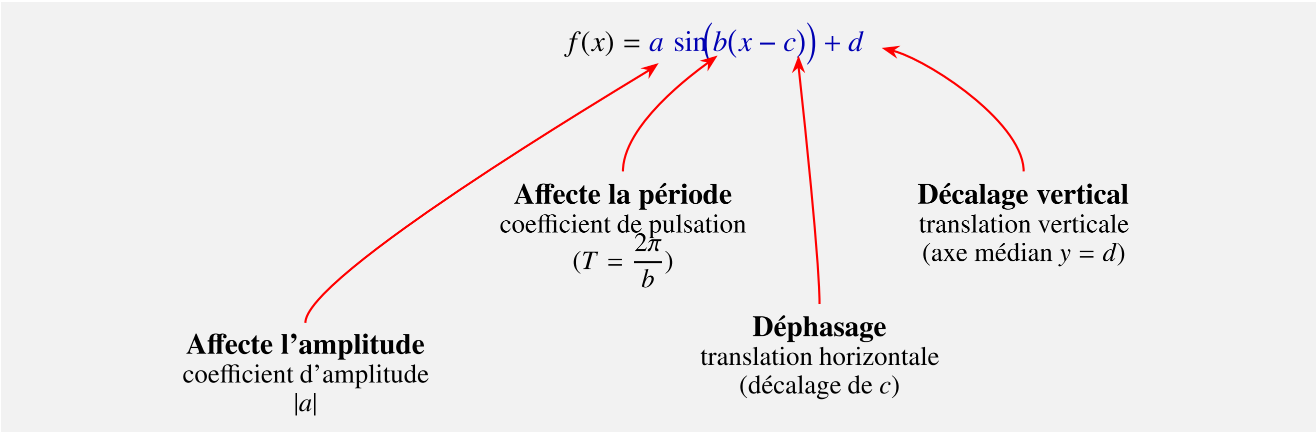
La transformation qui permet d'obtenir la fonction $x \mapsto \sin(x)+d$ effectue un décalage vertical de la sinusoïde. Elle translate verticalement la courbe de la fonction sin par le vecteur $\vec{u}(0;d)$.



5) Bilan

Soit $f(x) = a\sin(b(x-c)) + d \quad (b > 0)$. Les paramètres s'appellent généralement :

a : le coefficient d'amplitude (il fixe l'amplitude ($|a|$) et, si (a<0), il effectue une symétrie verticale).
b : le coefficient de pulsation (ou facteur de compression/étirement horizontal) ; il fixe la période $T = \frac{2\pi}{b}$.
c : le déphasage (ou translation horizontale) : la courbe est décalée de c vers la droite.
d : la translation verticale : l'axe principal (ou axe médian) est la droite d'équation $y = d$.



Exercice 1

$$f \ : \ x \longmapsto 3\cos(2\,x)$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Montrer que f est π-périodique.
4. Étudier les variations de f (tableau complet) sur $[0\,;\,\pi]$.
5. Étudier la convexité de f sur $[0\,;\,\pi]$.
6. Déterminer alors tous les points d'inflexion de C_f.

Exercice 2

$$g \ : \ x \longmapsto 2\sin(4\,x) + 13\,x$$

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Étudier la parité de g.
3. Déterminer g' et étudier sa périodicité.
4. Étudier les variations de g (tableau complet) sur $\mathbb{R}$.
5. Étudier la convexité de g sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.
6. Déterminer alors tous les points d'inflexion de C_g.

Exercice 3

Dériver les fonctions suivantes, sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \cos\sqrt{2x^2+1}$.
2. $g(x) = 2x\sin(4x^2+5x+2)$.