# Exercices d'optimisation

S6 - 2025-2026

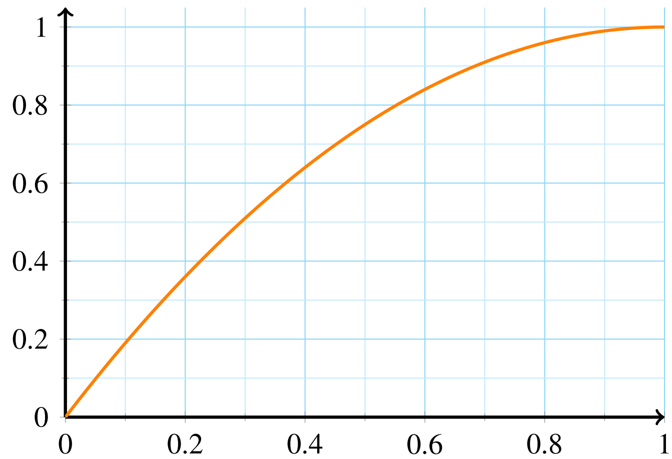
## Exercice 1

La courbe ci-contre donne la concentration $C$ d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) d'une personne pendant l'heure qui suit l'ingestion d'un verre d'alcool.
Cette courbe correspond à la fonction $C$ définie sur $[0; 1]$ par

$$C(t) = -t^2 + 2t.$$

La concentration $C(t)$ s'exprime en grammes par litre, et le temps $t$, en heures.
À un instant $t$ donné, $C'(t)$ représente la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang.

1. Quelle est la concentration d'alcool dans le sang au bout d'une demi-heure ?
2. (a) Justifier que la fonction $C$ est dérivable sur $[0; 1]$ et déterminer la fonction dérivée $C'$.
   (b) En déduire la vitesse d'apparition d'alcool à l'instant $t = 0{,}5$, c'est-à-dire une demi-heure après l'ingestion d'alcool, puis à l'instant $t = 1$, c'est-à-dire une heure après.
   (c) À quel instant cette vitesse semble-t-elle maximale ? Justifier la réponse.



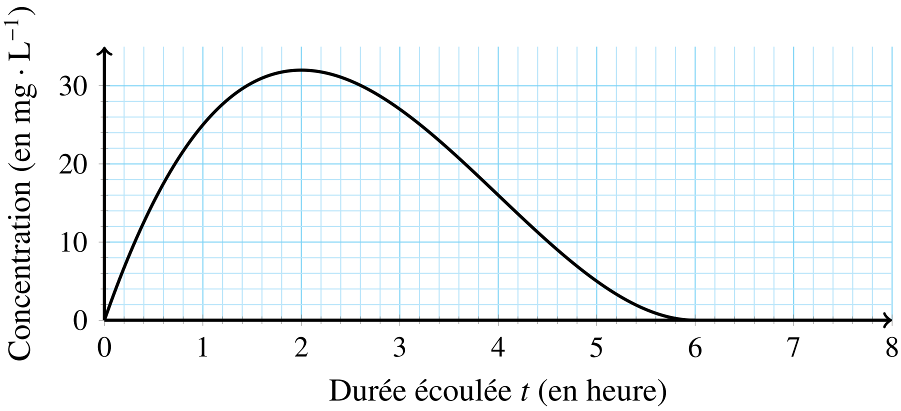
## Exercice 2

**Concentration d'un médicament**

Pour traiter un patient, un médecin procède à l'injection intramusculaire d'une substance médicamenteuse au temps $t = 0$ ($t$ est exprimé en heure).
Pour tout réel $t$ de l'intervalle de temps $[0; 6]$, la concentration du principe actif dans le sang du malade, exprimée en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$, $t$ heures après l'injection, est donnée par

$$c(t) = t^3 - 12t^2 + 36t.$$

Le principe actif se diffuse dans le sang puis est progressivement éliminé. Ce médicament est efficace lorsque la concentration du principe actif est supérieure ou égale à 25 $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$.




1. Étudier les variations de la fonction $c$ sur $[0; 6]$.
2. Justifier que, pour tout réel $t$ de $[0; 6]$, on a :

$$c(t) - 25 = (t - 1)(t^2 - 11t + 25).$$

   En déduire l'intervalle de temps sur lequel le principe actif injecté est efficace. Vérifier graphiquement ce résultat.
3. On appelle *vitesse d'élimination* du principe actif à l'instant $t$, le nombre $v(t)$, défini pour tout réel $t \in [2; 6]$ par :

$$v(t) = |c'(t)| = -c'(t).$$

   Cette vitesse $v(t)$ s'exprime en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{h}^{-1}$.
   (a) Par un raisonnement purement graphique, décrire les variations de la vitesse d'élimination $v(t)$ sur l'intervalle $[2; 6]$.
   (b) Déterminer algébriquement l'instant $t_0$ où la vitesse d'élimination du principe actif est maximale.