Équations

I) Notion d'équation

A) Vocabulaire

Vocabulaire

Inconnue : c'est une lettre qui cache un nombre cherché.

Équation : c'est une égalité qui contient une inconnue. Par exemple : $10x - 2 = 2x + 3$.

Résoudre une équation : c'est chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue.

Solution : c'est le nombre caché sous l'inconnue. Ici, il s'agit de $x = 0{,}625$.

Vérification : $10 \times 0{,}625 - 2 = 2 \times 0{,}625 + 3$, donc 0,625 est une solution.

Exercice

Le nombre 14 est-il une solution de l'équation $4(x - 2) = 3x + 6$?

Correction : Oui, car $4(14 - 2) = 48$ et $3 \times 14 + 6 = 48$.

B) Exemple concret

Exercice

Une carte d'abonnement pour le cinéma coûte 10 euros. Avec cette carte, le prix d'une entrée est de 4 euros.

1. Calculer le prix à payer pour 2, 3, puis 10 entrées.
2. Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x le prix à payer en comptant l'abonnement.

Correction :

1. Pour 2 entrées : $10 + 2 \times 4 = 18$ euros.
   Pour 3 entrées : $10 + 3 \times 4 = 22$ euros.
   Pour 10 entrées : $10 + 10 \times 4 = 50$ euros.
2. $4x + 10$

II) Résolution d'équations

A) Introduction

Soit l'équation : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

Le but est de trouver la valeur de x, c'est-à-dire d'isoler x dans l'équation pour arriver à x = nombre.

Les différents éléments d'une équation sont liés ensemble par des opérations.
Nous les désignerons « liens faibles » ($+$ et $-$) et « liens forts » ($\times$ et $\div$). Ces derniers marquent en effet une priorité opératoire. Pour signifier que le lien est fort, le symbole « $\times$ » peut être omis.
Dans l'équation ci-dessus, par exemple, $2x$ et $5x$ sont juxtaposés par le lien faible « + ». Par contre, 2 et x sont juxtaposés par un lien fort « $\times$ » qui est omis.

Dans l'équation $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$, on reconnaît des membres de la famille des x et des membres de la famille des nombres juxtaposés par des « liens faibles ».

Pour obtenir « x = nombre », on considèrera que la famille des x habite à gauche de la « barrière= » et la famille des nombres habite à droite.

On sera ainsi menés à effectuer des mouvements d'un côté à l'autre de la « barrière= » en suivant des règles différentes selon que le lien est fort ou faible.

B) Avec « lien faible »

Le savant perse Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (Bagdad, 780-850) est à l'origine des méthodes appelées « al jabr » (=le reboutement ; le mot est devenu « algèbre » aujourd'hui) et « al muqabala » (=la réduction).

On lui doit :
- le mot et la notion d'algorithme, dérivé du nom de ce mathématicien persan
- le mot et la notion d'algèbre, dérivé du nom d'un de ses ouvrages
- l'invention du zéro (les mots chiffre et zéro sont issus du même mot arabe)
- la diffusion au Moyen-Orient et en Europe de la numération et des chiffres indiens, sous le nom de chiffres arabes.

Méthode de la « balance » : on enlève ou on ajoute la même chose de chaque côté du signe égal.

Exemple

$2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$	
$7x - 4 = 6x + 2$	On réduit à gauche et à droite
$7x - 4 \quad \mathbf{+4} = 6x + 2 \quad \mathbf{+4}$	On ajoute la même quantité de chaque côté de l'égalité (ici 4)
$7x = 6x + 6$	On réduit
$7x \quad \mathbf{-6x} = 6x + 6 \quad \mathbf{-6x}$	On ajoute la même quantité de chaque côté de l'égalité (ici $-6x$)
$x = 6$	On réduit

C) Avec « lien fort »

Deux méthodes :
- Méthode de la « balance ». On multiplie ou on divise par le même nombre de chaque côté.
- Méthode « moyen mnémotechnique » (pas très usuel, voir les explications avec le professeur) :

$5 \times 2 = 10 \qquad 5 = \dfrac{10}{2} \qquad 2 = \dfrac{10}{5}$

Exemple

Exemples :

$2x = 6$ $\qquad$ $\dfrac{x}{-3} = 4$ $\qquad$ $\dfrac{7}{9}x = -2$

$x = \dfrac{6}{2}$ $\qquad$ $x = 4 \times (-3)$ $\qquad$ $x = -2 \times \dfrac{9}{7}$

$x = 3$ $\qquad$ $x = -12$ $\qquad$ $x = \dfrac{-18}{7}$

Exercice

Résoudre les équations suivantes :

a) $x - 3 = -16$

b) $-3 + x = 2$

c) $14x = 7$

Correction : a) $x = -13$ $\qquad$ b) $x = 5$ $\qquad$ c) $x = \dfrac{1}{2}$

III) Équations produits

Propriété

Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Autrement dit : Si un produit de facteurs est nul, alors au moins un des facteurs est nul.

Exemple

Résoudre l'équation $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$

On sait que : si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

$4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$

$4x = -6$ ou $-7x = -3$

$x = \dfrac{-6}{4}$ ou $x = \dfrac{-3}{-7}$

$x = \dfrac{-3}{2}$ ou $x = \dfrac{3}{7}$

$S = \left\{\dfrac{-3}{2}; \dfrac{3}{7}\right\}$

Exercice

Résoudre l'équation $(7x - 6)(-3 + 2x) = 0$

IV) Résolution de problèmes faisant intervenir une équation

Problème

Déterminer trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 465.

Choix de l'inconnue : soit n le premier des trois nombres cherchés.

Mise en équation du problème : $n + (n + 1) + (n + 2) = 465$.

Résolution de l'équation :

$3n + 3 = 465$
$3n = 465 - 3 = 462$
$n = 462 \div 3 = 154$

Solution : le premier nombre cherché est 154. Le deuxième nombre cherché est 155, et le troisième nombre est 156.

Vérification : on vérifie que la solution est cohérente : $154+155+156=465$.