Combinatoire

S6MA5 - 2025-2026

1 Notion de dénombrement sur un ensemble fini

Définition

Soit E un ensemble fini.
Le **cardinal** de E, noté $Card\,(E)$ ou $|E|$ est le nombre d'éléments de E.

Exemple

L'ensemble $\mathcal{E} = \{A\,;\,B\,;\,C\,;\,D\}$ constitué des quatre premières lettres de l'alphabet a pour cardinal 4.

Remarque

Le cardinal de l'ensemble vide est nul. Autrement dit : $Card(\emptyset) = 0$, cela signifie compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, déterminer son cardinal.

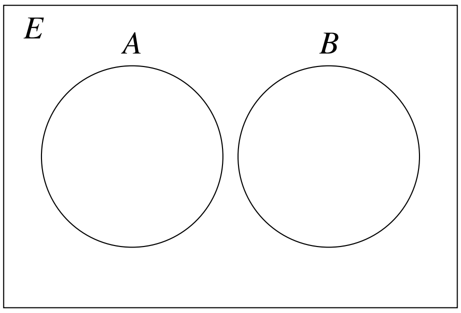
Propriété

Principe additif

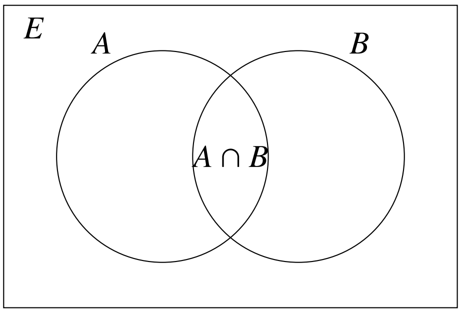
Si A et B sont deux ensembles, on a : $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$

En particulier, si A et B sont **disjoints**, $Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B)$

A et B disjoints



A et B non disjoints



Propriété

Principe multiplicatif

Soit E et F deux ensembles finis.
$Card(E \times F) = Card(E) \times Card(F)$

Pour $k \in \mathbb{N}\,;\,k \geqslant 2$: $Card(E^k) = (Card(E))^k$

2 p-listes (répétition possible)

Exemple introductif

Un sac contient 4 pièces numérotées de 1 à 4. L'ensemble des possibles est $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
On veut construire un nombre de deux chiffres en tirant au hasard deux pièces, en suivant les règles suivantes :

1. Les pièces sont prises l'une après l'autre (**consécutivement**).
2. La première pièce est **remise** dans le sac (on peut donc avoir deux fois de suite la même pièce).

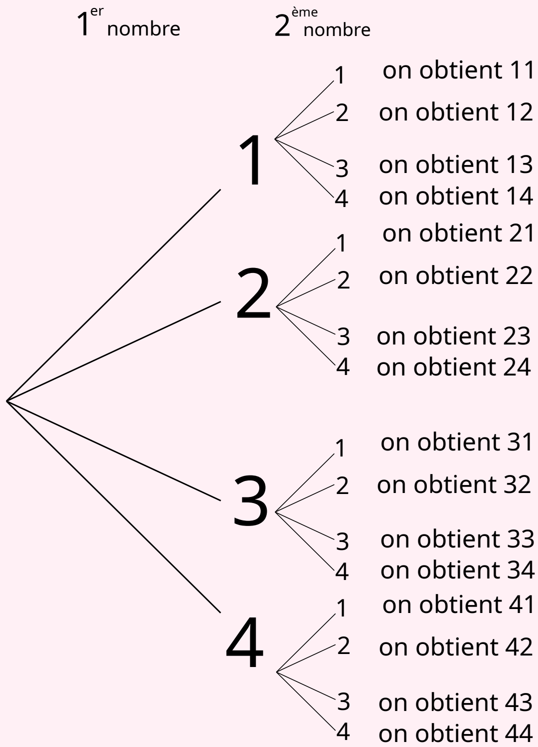
Combien de nombres peuvent ainsi être créés ?

On peut facilement lister les possibles, et on trouve comme issues :

$$\begin{array}{cccc} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{array}$$

Chaque issue est une liste ordonnée (l'ordre a ici de l'importance, car par exemple $12 \neq 21$) autorisant la répétition. Les issues sont des p-listes (plus précisément des listes composées de 2 éléments).

On peut créer un arbre des possibles, qui a deux niveaux :



On voit bien dans cet exemple qu'il y a 16 possibilités, ce qui correspond aux 4 choix possibles de la première pièce multipliés par les 4 choix possibles de la deuxième pièce : $4 \times 4 = 4^2 = 16$.

Définition

Soit un ensemble E contenant n éléments. On note $\text{Card}(E) = n$.
Une p-liste d'éléments de E est une liste ordonnée de p éléments de E dans laquelle la répétition est autorisée.

Le nombre total de p-listes possibles issues d'un ensemble de n éléments est n^p.

3 Arrangements : p-listes sans répétition

3.1 Factorielle d'un nombre entier

Définition

Factorielle : Soit n un entier supérieur ou égal à 1. La factorielle de l'entier n, notée $n!$, désigne le produit de tous les entiers naturels de 1 à n :

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Par convention : $0! = 1$.

Exemples

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880$.

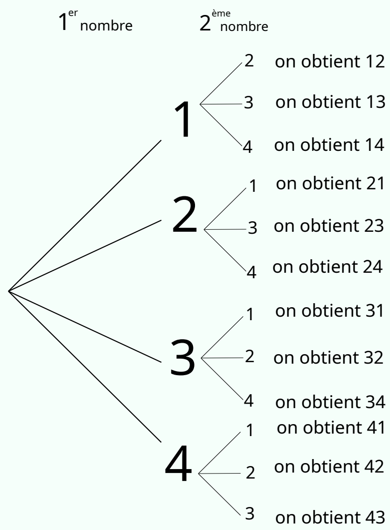
3.2 Arrangements

Exemple

L'expérience est la suivante (légèrement différente de l'expérience vue précédemment) :
Un sac contient 4 pièces numérotées de 1 à 4. L'ensemble des possibles est donc $E = \{1, 2, 3, 4\}$.
On veut construire un nombre de deux chiffres en tirant au hasard deux pièces, en suivant les règles suivantes :

1. Les pièces sont prises l'une après l'autre (**consécutivement**).
2. La première pièce n'est pas remise dans le sac.

On peut créer un arbre des possibles, qui a deux niveaux :



On voit sur cet exemple qu'il y a 12 possibilités, ce qui correspond aux 4 possibilités pour le premier choix de pièce multipliées par les 3 choix possibles pour la deuxième pièce (on ne peut pas avoir deux fois la même pièce, les chiffres sont donc différents) : $4 \times 3 = 12$.

Définition

Soit un ensemble E de n éléments, et $\text{Card}(E) = n$.
Un **arrangement** de p éléments de E est une liste ordonnée de p éléments différents de E (il n'y a pas de répétition des éléments).
Le **nombre d'arrangements** de p éléments d'un ensemble E à n éléments est noté A_n^p.

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1))$$

Nombre de choix pour le premier élément

Nombre de choix pour le deuxième élément

Nombre de choix pour le p-ième élément

> Le nombre d'arrangements possibles de p éléments issus d'un ensemble de n éléments est $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

Sur l'exemple précédent par exemple, $A_4^2 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$.

3.3 Cas particulier d'arrangement : arrangement de p éléments dans un ensemble de p éléments (permutation)

Combien d'arrangements de p éléments peut-on former à partir d'un ensemble de p éléments ?

$$A_p^p = \frac{p!}{(p-p)!} = \frac{p!}{1} = p!$$

Par exemple, si $E = \{a, b, c\}$, quels sont les arrangements des trois éléments de E ? Il n'y a pas de répétition, on parle ici d'arrangements.
On peut faire la liste des arrangements à trois éléments :

$$\begin{array}{ccc} (a,b,c) & (a,c,b) & (b,a,c) \\ (b,c,a) & (c,a,b) & (c,b,a) \end{array}$$

On retrouve bien les 6 possibilités, ce qui correspond à $A_3^3 = 3! = 6$.

On vient de ranger trois éléments dans un ensemble E contenant lui-même trois éléments. C'est un cas particulier d'arrangement, appelé **permutation**.
Plus généralement : un arrangement de n éléments d'un ensemble E à n éléments est appelé une **permutation** des éléments de E.

> Le nombre de permutations d'un ensemble de p éléments est $p!$

4 Combinaison

4.1 Définition et exemple

Exemple

Un sac contient 4 pièces numérotées de 1 à 4. L'ensemble des possibles est donc $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

On tire deux pièces **simultanément** (en même temps).

Combien de tirages différents peut-on avoir ?

On note les résultats entre { }.
Il est important de bien comprendre que {1 ; 2} et {2 ; 1} représentent « la même chose » (ce sont des ensembles égaux), car on tire les pièces en même temps : il n'y a pas d'ordre.
On peut facilement lister les possibles, et on trouve comme issues : $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{1, 4\}$; $\{2, 3\}$; $\{2, 4\}$; $\{3, 4\}$.
On compte 6 issues différentes.

On ne peut pas représenter l'expérience sous forme d'arbre, car il n'y a pas de « premier nombre » et de « deuxième nombre » (les deux pièces étant tirées en même temps).

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$. Soit E un ensemble tel que $Card\,(E) = n$.
Une **combinaison** de k éléments de E est une partie de k éléments de E.

Propriété

Le nombre de combinaisons de k éléments de E, noté $\binom{n}{k}$, est égal à : $\dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$

Remarque

- Une combinaison de E s'apparente à un tirage aléatoire **sans ordre** et **sans remise** d'éléments de E.
- Les nombres $\binom{n}{k}$ sont également appelés **coefficients binomiaux** et se lisent « k **parmi** n ».

Dans notre exemple, on cherche le nombre de combinaisons de 2 éléments parmi 4 éléments, c'est-à-dire $\binom{4}{2}$. On obtient alors :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{24}{4} = 6.$$

Remarque

- Dans la pratique, on utilisera souvent la calculatrice pour calculer les arrangements et les combinaisons.

- Il faut privilégier la notation $\binom{n}{k}$ par rapport à l'ancienne notation française C_n^k (on remarquera que la place du n et du k n'est pas la même avec cette notation).

- Pour comprendre le lien entre les arrangements et les combinaisons, voir la feuille « Différence entre combinaison et arrangement ». On notera en particulier que $\binom{n}{k} = \dfrac{A_n^k}{k!}$.

4.2 Propriétés et autres exemples

Exemple

Dans une école, les élèves de $S6$ doivent choisir 3 options parmi 12. Soit E l'ensemble des options à choisir. Le nombre de choix possibles pour un élève est donc : $\binom{12}{3} = \dfrac{12\,!}{3\,!\times 9\,!} = \dfrac{12\times 11\times 10}{3\times 2} = 4\times 11\times 5 = 220$

Propriété

— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$. On a : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

— Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n-1$. On a : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Remarque

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ $\qquad$ $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Propriété

Dans le cas particulier de tirage aléatoire **sans ordre** et **avec remise** de p éléments dans un ensemble à n éléments, le nombre de combinaisons est $\binom{n+p-1}{p}$.

Exemple

Le nombre de lancers différents que l'on peut obtenir en lançant simultanément 10 dés classiques est :

$$\binom{6+10-1}{10} = \binom{15}{10} = 3\,003$$

Propriété

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est à la $n^{\text{ème}}$ ligne et $k^{\text{ème}}$ colonne du triangle de Pascal ci-dessous.

$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
...	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	...

Définition

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E, c'est-à-dire de tous les sous-ensembles possibles de E. Cet ensemble contient toujours $\varnothing$ et E.

Propriété

Nombre de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide à n éléments. Le nombre de parties de E est : $Card(\mathcal{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Dém. D'une part, pour construire un sous-ensemble de E, on considère n étapes où, pour chaque élément de E, on décide de l'incorporer dans cette partie ou pas. Il y a donc deux possibilités par étapes et il y a n étapes, donc $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\ fois}$ possibilités de construire un sous-ensemble de E, soit 2^n.

D'autre part, le nombre de sous-ensemble de E est égal à la somme des sous-ensembles de 0 éléments, de 1 éléments, de 2 éléments, ..., de n éléments. Soit $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$.

Exemple Si $E = \{a\,;\,b\,;\,c\}$, alors $Card(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$.
En effet : $\mathcal{P}(E) = \left\{\varnothing\,;\,\{a\}\,;\,\{b\}\,;\,\{c\}\,;\,\{a\,;\,b\}\,;\,\{a\,;\,c\}\,;\,\{b\,;\,c\}\,;\,\{a\,;\,b\,;\,c\}\right\}$

Propriété **Formule du binôme de Newton**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\, y^{n-k}$$

5 Bilan et exemples

Pour dénombrer toutes les éventualités d'un problème, on peut prendre en compte les deux critères suivants.
- Les éléments peuvent-ils être répétés ?
- L'ordre des éléments est-il à prendre en compte ?

On résume alors les différents cas dans le tableau suivant. *Les éléments sont pris dans un ensemble de cardinal n.*

Critères	Avec répétition ($p > n$ possible)	Sans répétition ($k \leqslant n$)
Avec ordre	p-liste : n^p	Arrangement : $A_n^k = \dfrac{n\,!}{(n-k)\,!}$ OU Permutation : $n\,!$ $(= A_n^n)$
Sans ordre	$\binom{n+p-1}{p} = \dfrac{(n+p-1)\,!}{p\,!\,(n-1)\,!}$	Combinaison $\binom{n}{k} = \dfrac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}$ (ou C_n^k) « k parmi n »

Propriété Le nombre de parties d'un ensemble E de cardinal n est 2^n.

Exemples On distribue entre 0 et 32 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de distributions possibles ?

On compte ici le nombre de parties d'un ensemble à 32 éléments. Cela fait donc 2^{32} distributions possibles.

Propriété **Principe des tiroirs**
$n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on range $n+1$ « objets » dans n « tiroirs », au moins un tiroir contiendra plus d'un objet.

Exemple

1. Dans une classe de 25 élèves, on est sûrs qu'au moins 3 élèves sont nés le même mois.
2. On jette 51 miettes sur une table carrée de 1 m de côté. Montrer qu'il y a au moins un triangle dont les sommets sont des miettes dont l'aire vaut au plus 200 cm^2.

   On partage la table en 25 carrés de côté 20 cm. Au moins un carré contient au moins 3 miettes. Le triangle qui a pour sommets ces 3 miettes a une aire de maximum $\dfrac{20 \times 20}{2} = 200$ cm^2.

Bilan

1. Le **loto** : on tire, au hasard, 6 boules parmi 49 numérotées. Combien de tirages possibles ?
   — Peut-on obtenir plusieurs fois le même numéro lors d'un tirage ?

   Non. Donc pas de répétition.

   — L'ordre d'apparition des différents numéros a-t-il de l'importance ?

   Non. On considère les six numéros globalement ! Donc pas d'ordre.

   On compte alors les combinaisons. $\dbinom{49}{6} = \dfrac{49\,!}{6\,! \times 43\,!} = 13\,983\,816$ tirages possibles.
2. Le **podium** : 8 coureurs participent à la finale du $100\,m$. Combien y a-t-il de podiums possibles ?
   — Peut-on obtenir plusieurs fois le même coureur sur le podium ?

   Non. Donc pas de répétition.

   — L'ordre d'apparition des différents coureurs a-t-il de l'importance ?

   Oui, les médailles sont différentes. L'ordre est déterminant.

   On compte les arrangements (car $k < n$). $A_8^3 = \dfrac{8\,!}{(8-3)\,!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.
3. Le **QCM** : un QCM de 15 questions comporte 4 choix (a, b, c, d) dont un seul exact par question.
   Combien y a-t-il de façons de répondre à ce QCM ?
   — Peut-on donner plusieurs fois la même réponse ?

   Oui. Donc répétition possible.

   — L'ordre d'apparition des différentes réponses a-t-il de l'importance ?

   Oui, l'ordre est déterminant.

   On compte des p-listes. $4^{15} = 1\,073\,741\,824$ façons différentes de répondre à ce QCM.
4. On constitue des ballotins de 5 chocolats en piochant dans 3 variétés de chocolat différentes.
   Combien y a-t-il de façons de constituer un ballotin ?
   — Peut-on prendre plusieurs fois (ou même exclusivement) un chocolat d'une même variété ?

   Oui. Donc répétition possible.

   — L'ordre d'apparition des chocolats a-t-il de l'importance ?

   Non, l'ordre n'est pas important.

   On compte les combinaisons avec répétitions possibles. $\dbinom{3+5-1}{5} = \dbinom{7}{5} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21$ ballotins différents possibles.