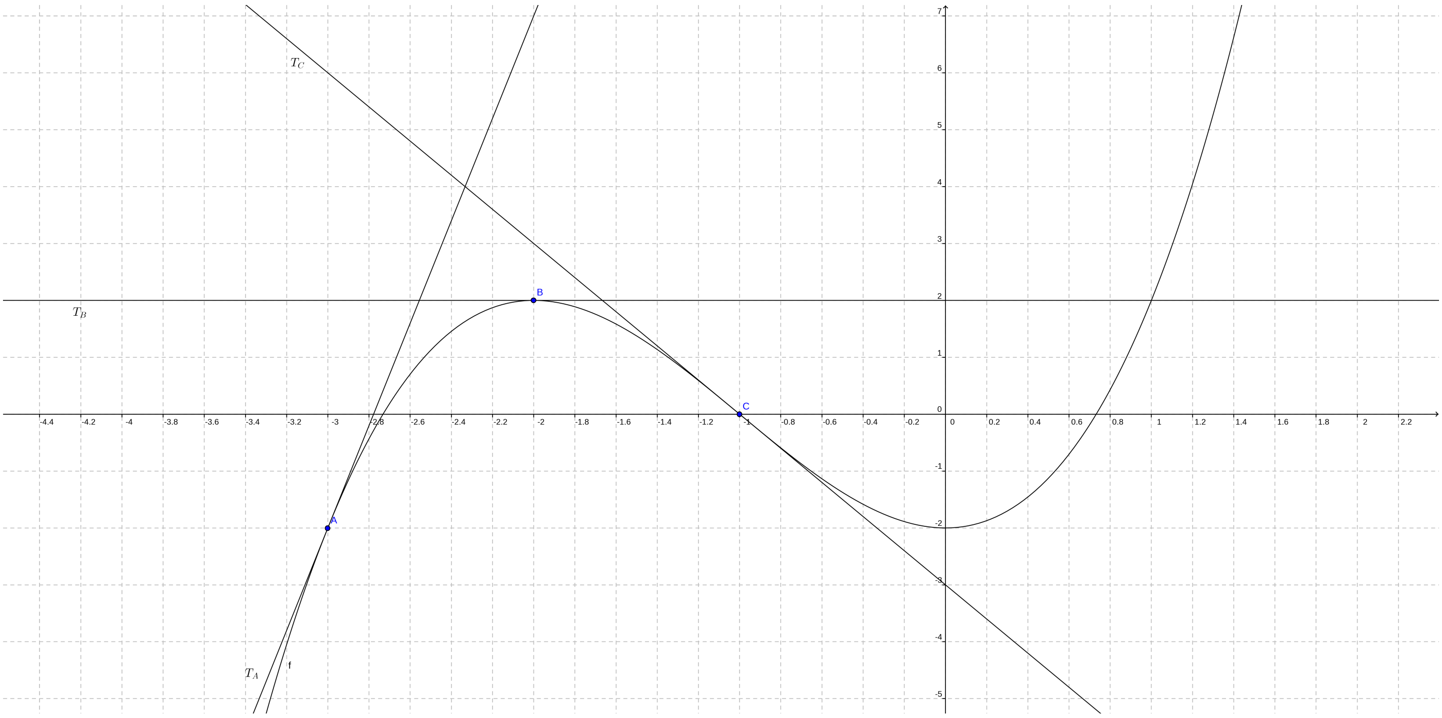
Exercice 1

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-dessous.



1. Donner par lecture graphique les équations des droites $\mathcal{T}_A$, $\mathcal{T}_B$ et $\mathcal{T}_C$, tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ en A, B et C.
2. Donner alors $f'(-3)$, $f'(-2)$ et $f'(-1)$.
3. Pour quelles valeurs de x semble-t-on avoir $f'(x) = 0$?
4. Comparer graphiquement :
   a) $f'(-2,5)$ et $f'(-0,5)$.
   b) $f'(-0,5)$ et $f'(1)$.
   c) $f'(0,5)$ et $f'(1)$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0,25\,x^2 - 2\,x + 3$.

1. Déterminer l'équation de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = 6$.
2. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x = -2$ est parallèle à $\Delta : y = -3\,x + 10,5$.

Exercice 3

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I.

a) $f(x) = 3\,x^2 + 2\,x - 5 \qquad I = \mathbb{R}$

b) $g(x) = 9\,x^5 - 12\,x^4 + 3\,x^2 \qquad I = \mathbb{R}$

c) $h(x) = -4\,x^7 + 54\,x^2 + 9 \qquad I = \mathbb{R}$

d) $k(x) = \dfrac{3}{x^2} \qquad I = \mathbb{R}^*$

e) $l(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{6}{x} \qquad I = \mathbb{R}^*$

f) $m(x) = \sqrt{x} + 30\,x^2 \qquad I = \mathbb{R}$

g) $u(x) = 5\,x^6 - 6\,\sqrt{x} \qquad I = \mathbb{R}_+^*$

h) $v(x) = \dfrac{x^4 + 3\,x^2 + 1}{4} \qquad I = \mathbb{R}$

Exercice 4

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes définies sur I.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2\,x+3} \qquad I = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1} \qquad I = \mathbb{R}$

c) $h(x) = \dfrac{6\,x^2+3\,x+1}{x^2+x+1} \qquad I = \mathbb{R}$

d) $j(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2} - 1 \qquad I =]1\ ;\ +\infty[$

e) $t(x) = \left(x^3+2\,x-3\right)\sqrt{x} \qquad I = \mathbb{R}_+$

f) $k(x) = \left(-2\,x^5+4\,x^2-4\right)\left(6\,x^3+9\right) \qquad I = \mathbb{R}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = x^2 - 6\,x + 16$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$, écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.
3. Existe-t-il une tangente dont le coefficient directeur est -4 ?

   Si oui, déterminer l'abscisse du point de la courbe concerné.
4. Existe-t-il une tangente passant par l'origine du repère ?

   Si oui, déterminer l'abscisse du point de la courbe concerné.

Exercice 6

Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ vérifie :

$$f(0) = 1 \qquad f'(0) = 4 \qquad f'(3) = -8$$

Exercice 7

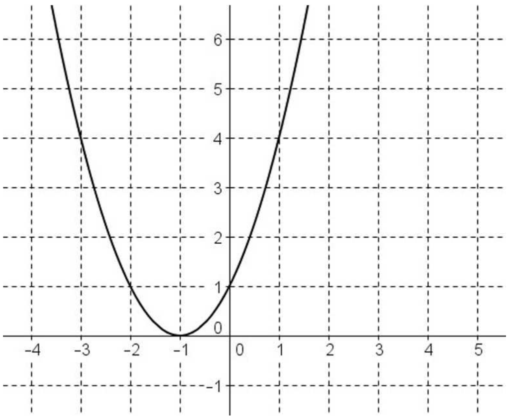
Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $\quad f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 2\,x^2 + 3\,x + 5$

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
2. a) Expliquer pourquoi il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.
   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

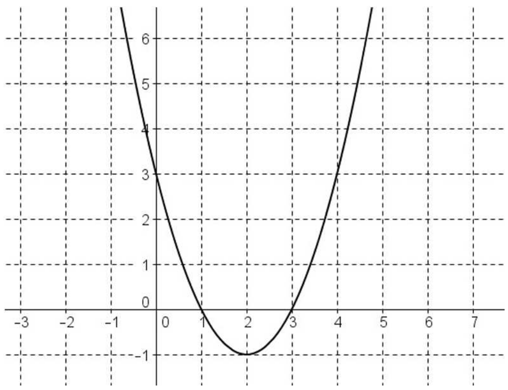
Exercice 8

Soit f la fonction dont la courbe représentative est ci-contre.
Parmi les quatre courbes suivantes, se trouve la courbe représentative de la fonction dérivée de f.
Déterminer la courbe correspondante à la représentation graphique de la fonction dérivée de f.

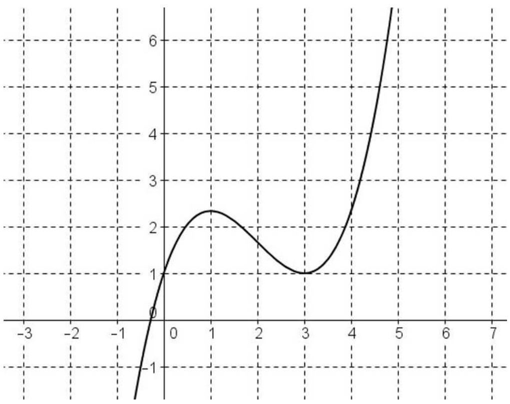
a)



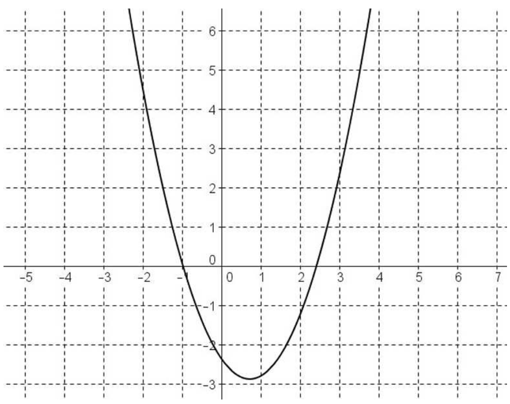
b)



c)



d)



Exercice 9 ....

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[$ par : $\quad f(x)=\dfrac{x^2-4\,x+8}{x-2}$

1. Résoudre $f(x)=0$.
2. On note $f\,'$ la fonction dérivée de f.

   a) Démontrer que pour tout réel x de $]-\infty\,;2[$: $\quad f\,'(x)=\dfrac{x^2-4\,x}{(x-2)^2}$

   b) Déterminer les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente D à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

Exercice 10 ....

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. On sait que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=5\,;\ f(-1)=3\,;$ $f(2)=8$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

1. Compléter le tableau des variations de f.
2. Donner les extrema locaux de f.

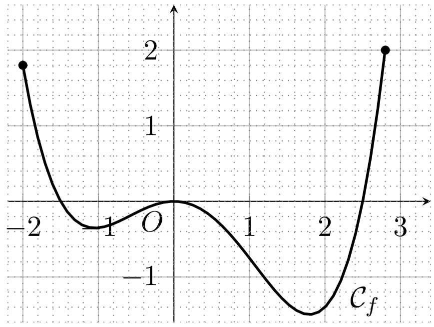
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f							

Exercice 11 ....Les questions sont indépendantes.

1. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = (x-1)(x-2)$. Dresser le tableau des variations de f.
2. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = x^3 - 3\,x^2$. Dresser le tableau des variations de f.

Exercice 12 ....

Soit f dérivable sur $[-2\,;\,2,8]$.



1. Résoudre graphiquement les équations suivantes.

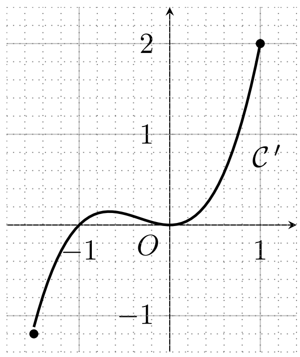
   a) $f(x) = 0$ *b)* $f'(x) = 0$

2. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes.

   a) $f(x) > 0$ *b)* $f(x) < 0$
   c) $f'(x) > 0$ *d)* $f'(x) < 0$

Exercice 13 ....

Soit f dérivable sur $[-1,5\,;\,1]$. Soit $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f'.



1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a) f admet un minimum en -1.
   b) f admet un maximum en -1.
   c) f admet un minimum en 0.
   d) f admet un maximum en 0.
2. Dresser le tableau des variations de f.

Exercice 14 ....

Pour chaque fonction, déterminer son domaine de définition et dresser son tableau des variations.

a) $f(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 5$ *b)* $f(x) = -x^3 + 2\,x - 3$ *c)* $f(x) = x^4 - x^2 + 2$

d) $f(x) = x^5 - x^3$ *e)* $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$ *f)* $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ *h)* $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x^2-1}$ *i)* $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^3}$

j) $f(x) = \dfrac{10\sqrt{x}}{x+1}$ *k)* $f(x) = x + \dfrac{1}{2\,x^2}$ *l)* $f(x) = x^2 + x - \dfrac{1}{x}$

Exercice 15 ....

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2\,x^2}{x^2 + 1}$$

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = x^3 + 3\,x + 4$

   a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

   b) Dresser le tableau de variations de g.

   c) Calculer $g(-1)$ et en déduire le signe de $g(x)$. *On utilisera les variations de g sur $\mathbb{R}$.*

2. **Étude de la fonction f**

   a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f.

   b) En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.

   c) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que pour tout réel x : $f(x) = a\,x + b + \dfrac{c\,x + d}{x^2 + 1}$

   d) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = a\,x + b$.

Exercice 16 ....

Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par :

$$f(x) = \frac{3}{4}\,x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

A) **Étude d'une fonction auxiliaire**

Soit g la fonction définie pour tout réel x par : $g(x) = 3\,x^3 - 4\,x - 8$

1. Étudier le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
2. a) Expliquer pourquoi il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

   b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

B) **Étude de la fonction f**

1. Montrer que pour tout réel x non nul : $f\,'(x) = \dfrac{g(x)}{4\,x^3}$
2. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ et dresser son tableau de variations.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{3}{4}\,x + 1$.

   a) Étudier le signe de $f(x) - \left(\dfrac{3}{4}\,x + 1\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

   b) En déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Exercice 17 .... Dans chaque cas, dresser le tableau des variations de f et tracer une esquisse possible de $\mathcal{C}_f$.

a)

$f(-1) = 1$

$f(0) = -1$

$f(3) = 2$

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f									

b) $D_f = \mathbb{R}^*$

$f(-1) = -2$

$f(1) = 2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f									

c)

$f(1) = 1$

$f(2) = 2$

$f(4) = 3$

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
f									

d)

$f(-4) = -1$ $\quad f(-3) = 1$

$f(0) = 3$ $\quad f(2) = 1$

$f(4) = 0$ $\quad f'(0) = 0$

x	-4		-3		2		4
f'	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$f'(x)$							
f							

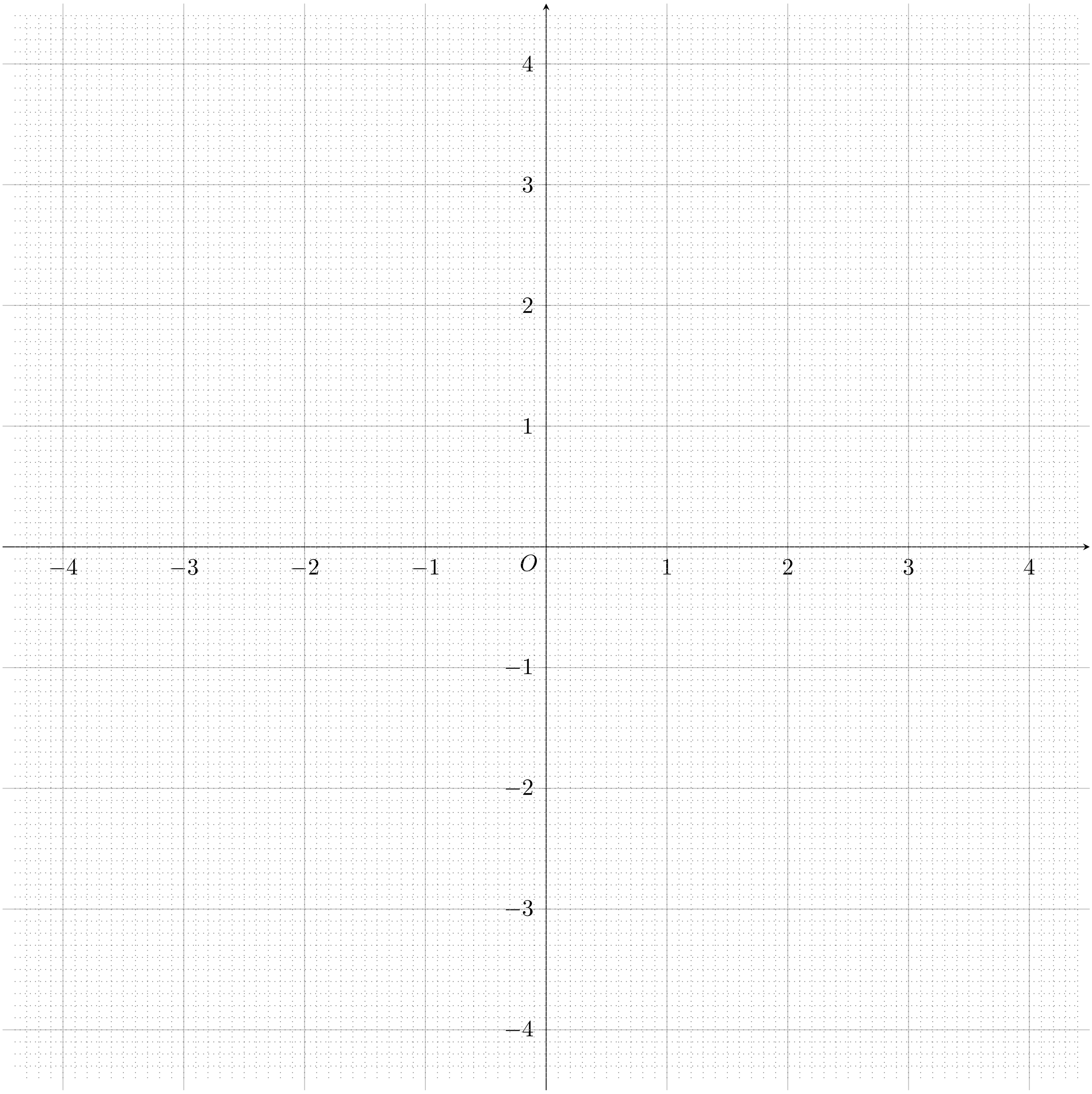
e)

$f(0) = -2$ $\quad f(2) = 1,5$

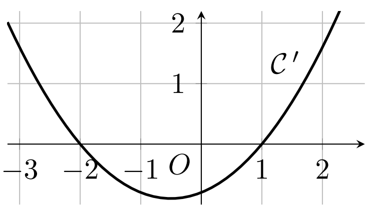
$f(3) = 0$ $\quad f(4) = -1$

$f'(2) = 0$

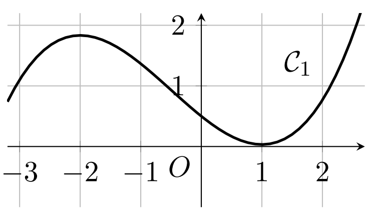
x	0		3		4		$+\infty$
f'	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1
$f'(x)$							
f							

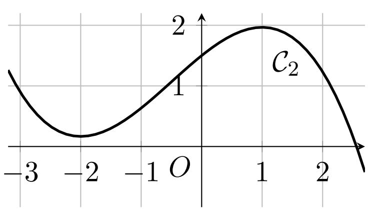


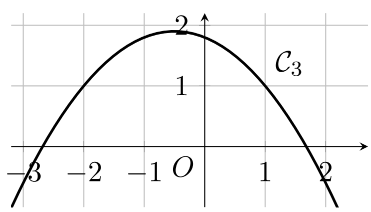
Exercice 18 ....



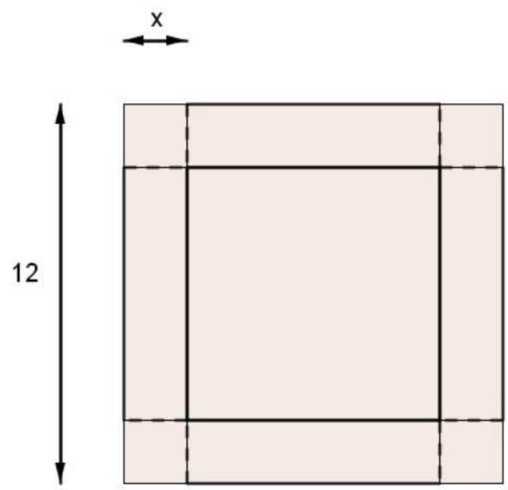
Parmi les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 représentées ci-dessous, laquelle est susceptible d'avoir pour dérivée la fonction représentée ci-contre ?

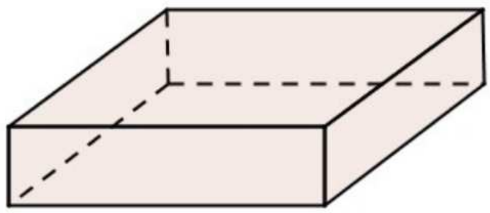






Exercice 19 ....





On découpe aux quatre coins d'une feuille cartonnée carrée de côté 12 des carrés de côté x pour construire le patron d'une boîte sans couvercle.

1. Justifier que l'ensemble des valeurs prises pour x est l'intervalle $[0\,;\,6]$.
2. Montrer que le volume de cette boîte est donné par :

$$\mathcal{V}(x) = 4\,x^3 - 48\,x^2 + 144\,x$$

3. Étudier la fonction $\mathcal{V}$ sur $[0\,;\,6]$.
4. En déduire qu'il existe une valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximal. Que vaut ce volume ?

Exercice 20 .... Banque E3C

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^2 + 4\,x + 3$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

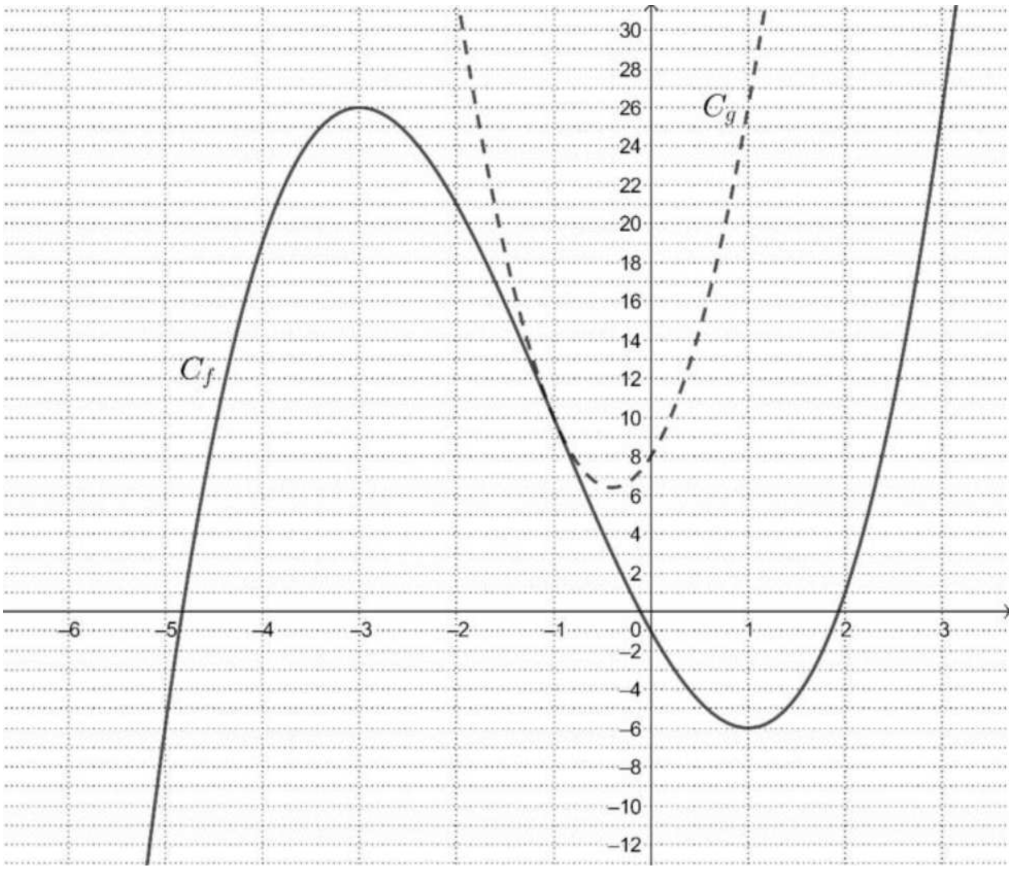
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$:

$$f\,'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$$

3. Étudier le signe de $f\,'(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$.
4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Exercice 21

On donne ci-dessous les représentations graphiques respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$.



1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3\,x^2 - 9\,x - 1$$

On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a) Calculer $f\,'(x)$.

   b) Dresser le tableau des variations de la fonction f.

   c) Étudier la convexité de f.

   d) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

   e) Déterminer une équation de la droite T tangente à $\mathcal{C}_{\{}$ au point d'abscisse -1.

2. g est une fonction polynôme du second degré, il existe donc trois réels a, b et c tels que pour tout réel x :

$$g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

On note Δ son discriminant.

   a) Déterminer, à l'aide du graphique, le signe de a et le signe de Δ.

   b) La fonction g est définie, pour tout réel x, par :

$$g(x) = 10\,x^2 + 8\,x + 8$$

   Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse -1 et qu'en ce point elles ont la même tangente.

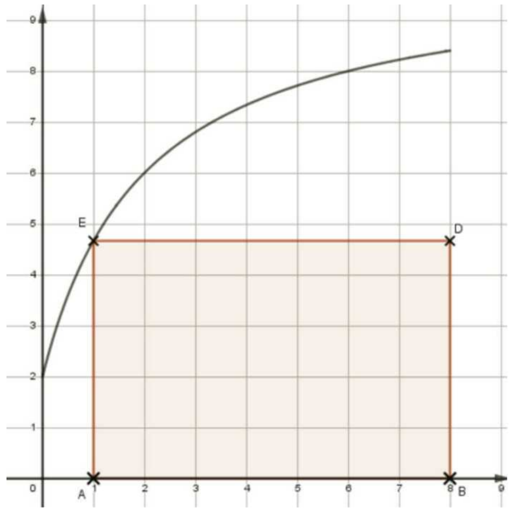
Exercice 22 ....

Partie A

Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de : $P(x) = -10\,x^2 - 40\,x + 120$

Partie B

On se place dans un repère orthonormé. La courbe $\mathcal{H}$ représentée sur le graphique ci-dessous est l'ensemble des points de l'hyperbole d'équation : $y = \dfrac{10\,x+4}{x+2}$; $x \in [0\,;\,8]$.



Pour tout x dans l'intervalle $[0\,;\,8]$, on considère le rectangle $ABDE$ tel que :

- $A(x\,;\,0)$
- $B(8\,;\,0)$
- $E \in \mathcal{H}$;
- E a pour abscisse x

Ci-contre, le dessin lorsque $x = 1$.

L'objectif de ce problème est de déterminer la ou les valeurs éventuelles x de l'intervalle $[0\,;\,8]$ correspondant à un rectangle $ABDE$ d'aire maximale.

1. Déterminer l'aire du rectangle $ABDE$ lorsque $x = 0$.
2. Déterminer l'aire du rectangle $ABDE$ lorsque $x = 4$.

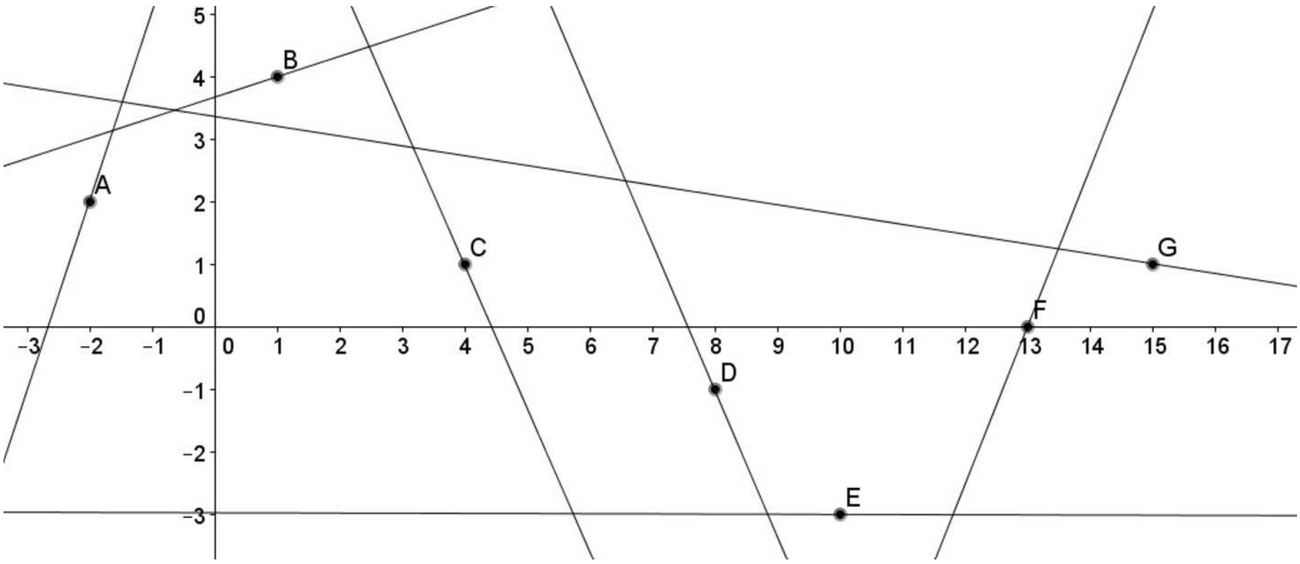
On définit la fonction $\mathcal{A}$ qui à tout réel x de $[0\,;\,8]$, associe l'aire du rectangle $ABDE$. Justifier que :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{-10\,x^2 + 76\,x + 32}{x+2}$$

3. Répondre au problème posé.

Exercice 23 ....

Dans le repère suivant, tracer une courbe passant par les différents points, telle que les tangentes en ces points soient les droites tracées. La fonction doit être définie sur l'intervalle $[-3\,;\,15]$.



Exercice 24 ....

Pour chacune des fonctions suivantes, dresser son tableau de variations, étudier sa convexité et déterminer ses éventuels points d'inflexions.

$$f \ : \ x \longmapsto 2\,x^3 - 9\,x^2 + 6\,x - 4 \qquad\qquad g \ : \ x \longmapsto \frac{1}{2}\,x^4 + 3\,x^3 - 12\,x^2 + 13\,x - 1$$

Exercice 25 ....

Pour chacune des fonctions suivantes (définie par morceaux), étudier la continuité et la dérivabilité en 5.

$$f \ : \ \begin{cases} f(x) = 3\,x + 7 & x \in]-\infty\,;\,5] \\ f(x) = 5\,x^2 - 3\,x - 90 & x \in]5\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$$g \ : \ \begin{cases} g(x) = \dfrac{11\,x - 1}{3\,x + 12} & x \in]-4\,;\,5[\\ g(x) = x^2 - 3\,x - 8 & x \in [5\,;\,+\infty[\end{cases}$$

$$h \ : \ \begin{cases} h(x) = 30\,x^2 + 20\,x - 13 & x \in]-\infty\,;\,5] \\ h(x) = 4\,x^3 + x^2 + 10\,x + 262 & x \in]5\,;\,+\infty[\end{cases}$$

Exercice 26

Des pucerons envahissent une roseraie. On introduit alors dans la roseraie des coccinelles, prédatrices des pucerons, à l'instant $t = 0$. On s'intéresse alors à l'évolution du nombre de pucerons à partir de cet instant et sur une période de 20 jours.

Partie A

Dans le repère ci-dessous, on a tracé :

a) La courbe $\mathcal{C}$ représentant le nombre de milliers de pucerons en fonction du nombre de jours écoulés depuis l'introduction des coccinelles.

b) La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passant par les points $A(0\,;\,2,1)$ et $B(2\,;\,4,3)$.

1. Déterminer par lecture graphiquement le nombre de pucerons à l'instant où l'on introduit les coccinelles puis le nombre maximal de pucerons sur la période de 20 jours.
2. On assimile la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant t au nombre dérivé $f'(t)$.

   Déterminer graphiquement la vitesse de prolifération des pucerons à l'instant $t = 0$.
3. Déterminer graphiquement le moment à partir duquel la vitesse de prolifération augmente.

Partie B

On modélise l'évolution du nombre de pucerons par la fonction f définie, pour tout t appartenant à $[0\,;\,20]$ par :

$$f(t) = 0,003\,t^3 - 0,12\,t^2 + 1,1\,t + 2,1$$

où t représente le nombre de jours écoulés et $f(t)$ le nombre de pucerons en milliers.

1. Déterminer $f'(t)$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$.
2. Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,20]$.